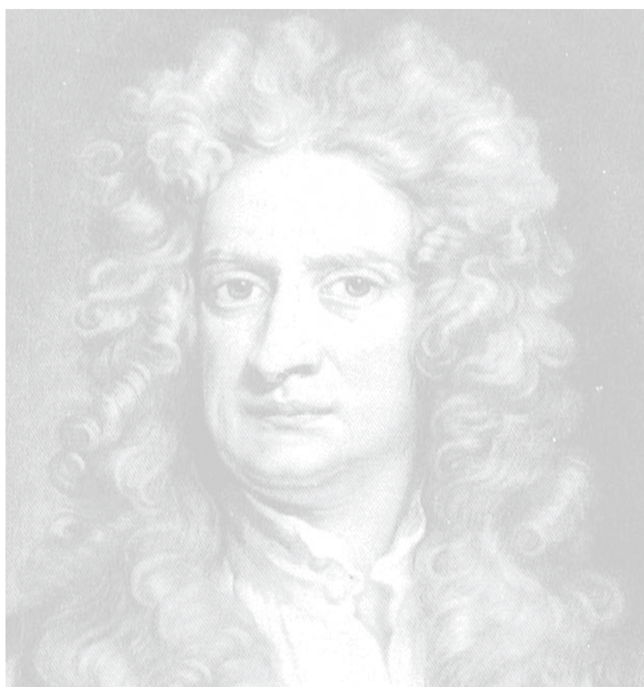


Cinvestav

Vol.14

Enero - Junio 2020

ISSN: 2007-4107



El Cálculo y su Enseñanza

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)=f(x)$$

Enseñanza de las Ciencias y la Matemática

Juguete didáctico conducente a desarrollar el pensamiento algebraico en educación preescolar

F. Cruz Cruz & M.G. Corona-Galindo

Instituto Nacional de Astrofísica Óptica y Electrónica

Tonantzintla, Puebla, México

senseicruzf30@gmail.com & mcorona@inaoep.mx



Fecha de Recepción:29 de abril 2019
Fecha de Aceptación: 16 de diciembre 2019
El Cálculo y su Enseñanza, Enseñanza de las Ciencias y la Matemática.
Volumen 14. Enero - Junio 2020.
Cinvestav-IPN © Ciudad de México. ISSN 2007-4107 P.p.1-15.

Resumen. Asociando el signo matemático = con el concepto de equilibrio, se diseñó una balanza, como rompecabezas, para inducir a los niños de preescolar al pensamiento algebraico inherente a la solución de ecuaciones de primer grado. La metodología está estructurada en diferentes actividades que se desarrollan en tres sesiones clase de 40 minutos cada una para trabajarse en tres días. Los resultados obtenidos evidencian que los niños logran abstraer el concepto de igualdad del concepto de equilibrio. Se obtuvieron resultados adicionales halagüeños, tales como socialización, trabajo en equipo y tolerancia.

Palabras clave: material didáctico, pensamiento algebraico, educación preescolar, balanza

Abstract: Associating the mathematical sign = with the equilibrium concept a wheighing scales as a puzzle has been designed and constructed in order to induce preschool children to the algebraic thinking inherent to the solution of first degree equations. The methodology is structured in different activities, which take place in three class sessions of 40 minutes each one for working during three days. The results obtained show that the children are able to abstract the concept of equality from the equilibrium concept. Additional results such as socialization, team work and tolerance have been also obtained.

Keywords: didactic material, algebraic thinking, preschool education, balance

1. Introducción

El ejercicio cotidiano de la docencia muestra que tanto el aprendizaje de las matemáticas como su enseñanza son un problema complejo. Muchos docentes se cuestionan ¿Por qué los estudiantes no aprenden? ¿Por qué les huyen a las matemáticas? Al respecto, Muñoz (2014) menciona que los estudiantes que cursan la asignatura sufren y los que ya pasaron no quieren saber nada de ella; entonces, ¿Qué pasa? ¿En dónde está el problema?

Autores como Butto y Rojano (2010) afirman que el estudio del algebra se introduce en edad ya avanzada y proponen que es oportuno iniciar con el pensamiento algebraico a edades tempranas, entre diez y once años, con el objeto de potenciar el desarrollo del pensamiento algebraico. En correspondencia con esta propuesta, Rodríguez (2010) abunda que se debe mostrar la matemática desde el nivel inicial de estudio como parte de la vida en los juegos y cultura confinante del niño a fin de evitar el rechazo de la matemática por enmarcarla en experiencias alejadas de su vida y que provoca la frustración y abandono escolar; es necesario, entonces, favorecer un proceso que por medio del juego el niño desarrolle los aspectos psíquicos, emocionales y cognitivos que coadyuven a formar estudiantes con valores objetivos y encuentren motivación por las matemáticas. Asimismo, deben diseñarse estrategias de juego de interacción entre los estudiantes para introducir conceptos y el formalismo de la lógica de argumentación o contestación directa, fundamentos del pensamiento matemático. Por su parte, Duval, y Sáenz (2016) proponen atender las dificultades que tienen los estudiantes en la comprensión matemática por medio de representaciones de los conceptos.

A niveles superiores al de preescolar, se puede imputar parcialmente la culpa del bajo rendimiento en matemáticas, al sistema educativo, al estudiante o al docente. En cuanto a los estudiantes, debe hacerse notar que tienen actualmente muchos distractores a la mano, e.g. el teléfono celular (móvil) y el uso excesivo de la computadora para actividades superfluas como la consulta indiscriminada de las redes sociales; lo cual puede conllevar, primero, a una falta de atención en la clase y después a que los contenidos expuestos no se entiendan y, consecuentemente, no se aprendan.
Empero, debe acotarse que lo descrito no es un juicio pernicioso sobre el uso de la tecnología en el coetáneo proceso de enseñanza y aprendizaje, sino una llamada de atención, por un lado, a la generación de estrategias didácticas que se puedan implementar para promover, utilizando la tecnología (móvil, computadoras, Smartphones y tablets) para comprender los conceptos inherentes al tema que se va a exponer en clase, ya sea por consulta directa a la información o por contraste; pues, hay una ingente cantidad de información en las redes; pero el estudiante no cuenta con los elementos cognitivos necesarios para discernir si es verdadera o falsa; consecuentemente, si la debe aprehender o desechar.

Por otro lado, con las reservas particulares que los casos ameriten, Madrid y Flores (2014) arguyen que los docentes no reflexionan ni investigan; por lo tanto, no pueden contribuir a cristalizar una profunda formación en el estudiante, pero ¿esto es garante de un aprendizaje profundo? Adicionalmente, como lo señala Corona, Romero, y Romano (2019) es urgente que el docente sustente cátedra en vez de clase; empero, en nuestro caso, sostenemos que

el susodicho, además, debe ser capaz de dirigir permanentemente las pingües investigaciones nacidas de las inquietudes del estudiante.

Adicionalmente, urge romper el paradigma de que las TIC sirven solo como distractores; pues se pueden utilizar también como adminículos en el proceso de enseñanza y aprendizaje, pero esto amerita más tiempo para pensar sobre los contenidos a incluir en la clase y las actividades a realizar, a través de las TIC, para fortalecer el aprendizaje; esto implica diseñar un nuevo perfil del docente; pues, éste debe ponerse a la par en la búsqueda de la información a través de las TIC que realiza el estudiante e ir al encuentro de sus pensamientos y complementarlos; pues como lo señala Serres (2013), el estudiante actual es diestro en buscar información y generar pensamientos a gran velocidad, pero a costa de la abstracción. En este escenario, el docente, además, debe estar preparado para guiar al estudiante que, con *presunción de competencia*, (Serres, 2013, p. 80) defiende obstinadamente información falsa, argumentando que es correcta porque la leyó en internet, e.g. la que se encuentra en Influencer y Edutuber.

Sobre el sistema educativo, cundimos que las laxas maneras de evaluar: como aprobar, con flagrante desacuerdo con los procedimientos establecidos para evaluar el aprendizaje, conduce a una carencia de conocimientos fundamentales que serán la estructura de los aprendizajes posteriores. Por todo lo antes expuesto, es de interés para la investigación matemática buscar nuevos métodos que motiven y provoquen en el estudiante un cambio significativo en el diario aprendizaje, pero desde la edad temprana, en nuestro caso, segundo y tercer grado de preescolar –cuando adquieren los conceptos de largo, corto, lejos cerca, mucho poco-, esto es, entre cuatro y cinco años, aunque esta sugerencia no excluye probar las propuestas desde el primer año del preescolar, tres años.

Ausubel, Novak y Hanesian (2019), teóricos cognoscitivistas, postulan que el aprendizaje implica una reestructuración activa de las percepciones, ideas, conceptos y esquemas que el aprendiz posee en su estructura cognitiva; así mismo, Díaz y Hernández (2002) cita que el aprendizaje no es una simple asimilación pasiva de información literal, pues el sujeto la transforma y estructura de tal manera que los materiales de estudio y la información exterior se interrelacionan e interactúan con los esquemas previos de conocimiento y las características personales del aprendiz. Para el desarrollo del pensamiento matemático, se requiere que el estudiante se disponga mental y emocionalmente, ya que se requiere de un alto nivel de abstracción y de un uso bien estructurado del lenguaje; pero esto, lo debe aprender el estudiante desde edad temprana. En adición, a las formas metodológicas de enseñanza que el docente utilice, Durón, León y Hernández (2011) señalan que es pertinente que el docente investigue permanentemente sobre nuevas estrategias metodológicas que sirvan de apoyo para mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje y que faciliten al estudiante el desarrollo del pensamiento algebraico, utilizando material concreto en la enseñanza de los contenidos matemáticos.

En el marco del bagaje de conceptos expuestos, en el presente trabajo se pone a consideración la manera de inducir al niño, por medio del juego, al conocimiento del pensamiento algebraico en el nivel preescolar, utilizando un juguete como material didáctico. Expuesto así el propósito, no es solo diversión, sino que incide en los terrenos de la gamificación; pues tiene un contenido didáctico: la aprehensión del concepto de

equilibrio e igualdad, ataviado con actividades como las siguientes: libertad para divertirse con lo que tiene en sus manos, curiosidad que lo motiva a armar lo que quiera sin miedo a equivocarse, asertividad en la consecución de sus acciones hasta lograr lo que inicialmente se propusieron y colaboración con sus pares, además de haber sentido el reto –armado de la balanza—como un desafío.

Las risas permanentes entre ellos mostraban gran emoción. Empero, debe apuntarse que lo que no diseñamos fue una estrategia de beneficio, i.e. ofrecerle algo al niño a cambio de algo; pues notamos que, si el niño está emocionado con lo que está aprendiendo, los premios salen sobrando.

Acorde con lo que alude Rodríguez, (2010), consideramos pertinente iniciar al niño desde prescolar al pensamiento matemático, pero fijándonos más en el significado filosófico inherente a la formulación matemática y no en su traducción tradicional directa. Se ha escogido el signo igual y se ha asociado con el concepto físico-filosófico de equilibrio. Es de esperarse que, si esto se entiende desde edad temprana, cuando el niño vea, en su formación secundaria la ecuación $1+x=8$, entenderá que debe haber siempre equilibrio entre la parte izquierda y la derecha de esta ecuación, en consecuencia, la solución debe ser el valor de x para mantener el equilibrio.

Sin embargo, esto nos es inmediato ni plausible sólo con un juguete, ni mucho menos habiendo jugado con él pocas veces; por esta razón, estamos diseñando una serie de variaciones del juguete a fin de ir introduciendo conceptos matemáticos paulatinamente, al tiempo que se está patentando para poder fabricarlo en serie y ponerlo a disposición de los niños; pues, Villarroel y Sgreccia (2011) mencionan --citando a Alsina, Burgués y Fortuny (1988)--, que estos objetos, aparatos o medios son los que ayudan a descubrir, consolidar o entender conceptos en las diferentes fases del aprendizaje; sin embargo, se experimentó que a esta edad el niño quiere sentir el juguete como de su propiedad, este sentimiento, seguramente, está ligado a la emoción que el niño asoció con la novedad, características también de la gamificación.

El desarrollo del presente trabajo se formula en dos partes, la primera, consiste en la revisión de documentos científicos: investigaciones que dan solución a problemáticas similares, respecto al aprendizaje y a la enseñanza de las matemáticas, específicamente los que tratan sobre el desarrollo del pensamiento algebraico utilizando materiales didácticos. Para esto, se revisaron los artículos que versan sobre propuestas matemáticas y se fijó la atención en aquellos cuyos autores proponen metodologías constructivistas. Se examinaron, además, invenciones de dispositivos didácticos; en específico, balanzas educativas; incluso, se consideraron algunas patentes registradas en los Estados Unidos con la finalidad de diseñar nuestro juguete didáctico como objeto único. En la segunda parte, se diseñó para nivel de preescolar el juguete que se presenta en la Figura 1.

En la revisión de documentos científicos, nos encontramos con diversas propuestas respecto al aprendizaje y a la enseñanza de las matemáticas, las cuales se desarrollan en distintos ambientes y diferentes circunstancias; pero descubrimos que persiguen una metodología en que se lleve al estudiante a un *aprendizaje significativo* (aprehensión inteligible). Recogemos para el caso que nos ocupa, a Ausubel, Novak y Hanesian (2019)

postulando que el aprendizaje implica una reestructuración activa de las percepciones y conceptos y a Moreira (2005, 2017) afirmando que el aprendizaje significativo es necesario como referente para la organización de la enseñanza en una cultura educativa en la que se tomen en cuenta diferentes aspectos como aprender a formular preguntas en lugar de enseñar a responderlas.

Para lograrlo, es necesario utilizar los materiales que coadyuven a percibir y a representar al mundo, cuidar que el lenguaje esté involucrado en toda la realidad, reaprender que el significado está en las palabras y no en las personas –reafirmando esta diferencia desde la edad temprana, el niño aprenderá a debatir ideas sin recurrir a la argumentación *ad hominem* para destruir argumentos, muy socorrida, por cierto, en nuestro medio escolar actual-. Aún más, se le debe enseñar a aprender de los errores, desaprender cosas irrelevantes y aprender metodologías diversas para usar lo menos posible el pizarrón. En suma, son varios los conceptos que se tienen que interrelacionar para crear clases dinámicas encaminadas a la obtención de un aprendizaje significativo

Por su parte, Celis, et al. (2014), mencionan que las estrategias didácticas deben señalar claramente los procedimientos, técnicas y recursos que motiven una fácil comprensión de los aprendizajes. Así mismo, Medrano (2015) sostiene que, debido a los bajos desempeños obtenidos por los estudiantes al empezar con el aprendizaje algebraico en la secundaria, se deben implementar estrategias educativas que incorporen el álgebra desde los primeros años de la educación formal; de esta manera, incorporando elementos, conceptos y prácticas algebraicas desde la educación primaria, se promueve el pensamiento algebraico y se posibilita una comprensión sólida; sin embargo, desde nuestro punto de vista, es prudente hacerlo desde preescolar.

1.1 Contexto de la educación matemática en la región de aplicación de la propuesta

En nuestra experiencia como docentes, encontramos que a los estudiantes se les dificulta el aprendizaje de las matemáticas cuando se presenta una situación descontextualizada de aprendizaje. Cruz Cruz, Báez, y Corona (2018) mencionan que, en este caso los estudiantes no logran desarrollar procesos cognitivos que los lleven a razonar y afianzar el conocimiento a fin de que puedan utilizarlos más tarde para resolver problemas cotidianos. Esta manera de presentar las matemáticas, resolviendo, sin recato, los problemas expuestos en los libros y, en el peor de los casos, sólo los ejercicios resueltos en ellos, impera en zonas escolares alejadas de la fiscalización pertinente de las autoridades encargadas de hacerlo. Aunado esto al hecho de que algunos docentes se resisten a los cambios e innovaciones que requiere nuestra enseñanza y persisten en las mismas prácticas antiguas y tediosas, basadas en exposiciones en el pizarrón (manifestación expresa del tipo de enseñanza conductista en donde el docente explica y el estudiante solamente escucha), se tiene un bajo aprovechamiento de los chicos en la materia de matemáticas.

Finalmente, debe señalarse que el nuevo sistema educativo en nuestro país, en el que se pretende una participación activa del estudiante, se ha complicado debido a la falta de claridad de los programas de estudio. Soto, Mosquera y Gómez (2005) mencionan que hay que animar al docente a buscar alternativas y estrategias que contribuyan al desarrollo de

nuevas metodologías basadas en lo lúdico; que ayuden al niño a desarrollar su mente y sus potencialidades intelectuales, sensitivas, afectivas y físicas de un modo armonioso, por la semejanza de estructura entre el juego y la matemática. Por esta razón, soslayando los necios lineamientos oficiales, es importante buscar metodologías que ayuden al estudiante a una mejor comprensión de los conceptos, pero desde la edad temprana.

1.2 Planteamiento del problema de investigación y postulación de una solución

Una de las problemática que nos encontramos en los estudiantes de secundaria y del nivel medio superior es el proceso del cambio de la aritmética al algebra; muchos escolares no logran relacionar los conceptos algebraicos con ideas posteriores y ligeramente más complejas dentro de la misma materia de álgebra; por ejemplo, modelar una ecuación algebraica de primer grado que represente un problema contextualizado al que tengan que darle solución; sin embargo, si se les presenta una relación o igualdad ya formulada y se les pide resolverla lo hacen mecánicamente sin problema alguno, pero ya en los exámenes aplicados dos semanas después, no recuerdan los conceptos fundamentales. Dado que el aprendizaje del algebra en nuestro país, inicia en el nivel secundario, para resarcir este problema, nos vino a la mente introducir el concepto de equilibrio desde el nivel de preescolar, asociándolo con el sigo matemático "=" con miras a entender el mismo concepto que se debe mantener en la solución de las ecuaciones algebraicas.

1.3 Objetivos de la propuesta

La finalidad de este trabajo es utilizar una balanza *sui géneris*, como material didáctico, para desarrollar el pensamiento algebraico en niños de nivel preescolar, encaminado a la solución de ecuaciones de primer grado; se maneja en el juguete que se diseñó, el concepto de equilibrio con la pretención de que el niño, jugando con este concepto físico-filosófico, abstraiga el concepto de igualdad y que, por medio del juego, adquiera habilidades psicomotrices, se relacione con sus pares, aprenda a tomar decisiones y se motive para estudios posteriores.

1.4 Justificación de la investigación

A nivel de preescolar, el programa de estudio 2011 de la Secretaria de Educación Pública (SEP, 2011) está estructurado con seis campos formativos: Lenguaje y comunicación, pensamiento matemático, exploración y conocimiento del mundo, desarrollo físico y social y, por último, expresión y apreciación artísticos. En el nuevo modelo educativo que entró en vigor en 2018, se retoman los primeros tres campos y los siguientes se ampliaron y se dividieron formando once campos ahora llamados ámbitos de aprendizaje. Se debe señalar, además, que tienen el propósito de desarrollar conocimientos, habilidades, actitudes y valores. Restringiéndonos al área matemática, en dicho documento se establecen algunos propósitos de la educación preescolar; de ellos podemos mencionar algunos: usar el razonamiento matemático en situaciones que demanden utilizar el conteo, comprender las relaciones entre datos de un problema y razonar para comparar y medir longitudes de objetos y la capacidad de recipientes: largo-corto, alto-bajo, poco-mucho lejos-cerca, mas-menos, lleno-vacío. Nuestro planteamiento toma en cuenta estos conocimientos previos de la aritmética y los relaciona con los elementos del algebra.

1.5 Referencias conceptuales sobre el tema de investigación

Del análisis de las propuestas que se discutieron líneas arriba, se colige que tratan la problemática del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas con una tendencia común: están enmarcadas en una metodología en la que el estudiante sea activo: el protagonista en la adquisición del conocimiento, restringiendo la actividad del docente a la de un organizador, guía y creador de diferentes estrategias y materiales didácticos que coadyuven al estudiante a apropiarse de los conocimientos. Cuevas, Martínez, y Pluvinage, (2012) introducen el concepto de pensamiento funcional (o cuarto estrato del pensamiento) como una etapa cognitiva del pensamiento matemático que hace posible que el estudiante pueda interactuar con el mundo real, mientras que Pimienta (2012) argumentan a favor de que las estrategias de enseñanza y aprendizaje ayudan a los docentes a desarrollar conocimientos, habilidades y actitudes que facilitan los procesos en la generación de conocimientos.

De la generalidad de los estudios analizados, se infiere que consideran de suma importancia abordar la problemática inherente al aprendizaje y a la enseñanza de los contenidos y se pone énfasis en las metodologías empoderadas en materiales concretos, pero ninguno de ellos considera idóneo iniciar con el desarrollo de pensamiento algebraico desde el nivel inicial (preescolar). De manera excepcional, Escobar (2006) menciona que: las acciones educativas en los primeros años de vida deben estar dirigidas a estimular el desarrollo cognitivo, emocional, de lenguaje, físico motor, social, moral y sexual de los niños, de tal manera, que no se pierda el espacio más relevante en la vida del ser humano y se potencialicen sus capacidades teniendo en cuenta su entorno, y estímulos que se le brinden.

Más concretamente, en cuanto al aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas en los primeros años de vida, los autores Butto y Rojano, (2010) proponen que es oportuno iniciar al estudiante en el pensamiento algebraico a edades tempranas, entre los siete y once años. Sin embargo, proponemos que debe ser inducido desde los tres años con juguetes como el que se pone a consideración, el cual tiene varias facetas de extensión, pero por el momento presentamos la primera.

En cuanto a la gamificación, según Gallego y de Pablos, es la confluencia de estrategias de marketing, psicología y juegos para crear una expectativa. Obviamente, para su aplicación en educación, desechamos la primera vertiente y nos restringimos a la parte psicológica, relacionando emociones, sentimientos y motivación, más su relación con el juego (Cf Zepeda et al, 2016); pues, de acuerdo con Gallego et al. (2014), se pretende que el niño aprenda jugando. El juguete que se diseñó está enfocado al aprendizaje del concepto de equilibrio e igualdad, como leitmotiv, y aliñado con curiosidad, libertad para divertirse jugando, frescura frente a la realidad próxima, sin miedo a enfrentarla o a errar en la elección del camino, sentimiento de experimentación (Cf. Martínez, 2017) y espíritu de cooperación.

1. 6 Metodología

Esta propuesta consiste en la manipulación de una balanza ensamblable de madera en forma de rompecabezas como juguete didáctico. Se aplicó en el segundo semestre del ciclo escolar agosto 2017 a junio 2018 en dos grupos de diferente nivel, uno de 32 niños que curso el tercer grado de preescolar y otro grupo de 30 niños del segundo grado, ambos pertenecientes a la escuela Jardín de niños Sayil que se encuentra en la comunidad de Azumbilla, ubicada en el municipio de Nicolás Bravo en el Estado de Puebla, México. El trabajo se planeó en tres sesiones clase de 40 minutos para desarrollar una por día.

En la primera sesión, los niños ensamblaron las piezas formando diferentes estructuras en equilibrio, pero también se construyó la balanza. En la segunda sesión, experimentaron con la posición de equilibrio, utilizando piedrecillas, arena, tierra y, en la tercera, con canicas y maíz. Debe hacerse notar que en la Figura 1, debajo de las piedrecillas que se observan, hay arena. La utilización de estos diferentes materiales, se hizo *ex profeso y* con la finalidad de establecer un bagaje experimental propicio para entender las fracciones de una unidad; trayectoria didáctica que está en preparación. Antes de terminar la segunda sesión, se solicitó a los niños que dibujaran en una hoja blanca la situación de equilibrio de la balanza (Cf. Figuras 1 y 2).

2. Desarrollo de la propuesta

Es importante reiterar que el juego didáctico consiste en un rompecabezas en forma de balanza. Las piezas que la componen se pueden acoplar entre sí para formar distintos cuerpos abstractos, pues no se persigue un solo patrón en el armado. Esto se hizo con la finalidad de que el niño manipule las piezas y juegue con ellas armando distintas formas hasta que logre armar por sí sólo la balanza. Dado que el niño no conoce de inicio la forma final del rompecabezas, armó diferentes formas geométricas. El diseño del juguete, así expuesto, induce al niño a observar, razonar, socializar y desarrollar habilidades psicomotrices finas, al tiempo que juega con sus pares y se motiva a tomar decisiones propias. A continuación, se describe paso a paso la estrategia.

2.1 Sesión 1

En esta sesión el objetivo era lograr el armado de la balanza. Para ello el docente organizó 15 parejas de niños y los invitó a que se acomodara una pareja por mesa de trabajo. Después de haber repartido un juego de piezas del rompecabezas a cada pareja, se invitó a iniciar con el juego, acompañando la invitación con las preguntas ¿han jugado con un rompecabezas? y ¿saben qué es una balanza? Este cuestionamiento está enmarcado en la propuesta de Moreira (2005, 2017): enseñar al niño a hacer preguntas. De acuerdo a las respuestas que se emitieron, se infirió que sería un buen desafío para ellos el armado del juguete. De inicio, algunos niños se dedicaron a observar las piezas. Posteriormente, experimentaron y, finalmente, devino el ensamblado esperado. Una vez armada la balanza, mencionaron que se parecía a un sube y baja, incidiendo este comentario en la asociación del conocimiento nuevo con uno que ya se tenía; tal como lo arguye Díaz y Hernández (2002). Enseguida, Se les invitó a observar la balanza, verificar si estaba en la posición de equilibrio y asociaron la posición horizontal de la regleta con el concepto de equilibrio.

2.2 Sesión 2

Desde el inicio de esta sesión, continuaron el proceso de experimentación del fenómeno físico-filosófico de equilibrio con los objetos que tenían a la mano. A continuación, se proporcionó a los niños un par de recipientes (cubetitas con asa) para que las suspendieran en los extremos de la balanza; los cuales fueron llenados con arena y piedras; o la combinación de ambos, tal como se puede observar en la Figura 1.



Figura 1

b) Para reforzar el conocimiento adquirido sobre concepto de equilibrio, se pidió a los niños que dibujaran la balanza cuando se encontraba en tal posición. Para ello, se les dieron hojas blancas y en la Figuras 1 y 2, se muestran las evidencias del proceso y un resultado.

2.3 Sesión 3

La experimentación continuó; pues todos los niños empezaron a armar su balanza y con maíz y canicas lograron el equilibrio. Como ya se mencionó arriba, se incitó a jugar con objetos grandes (canicas), de menor tamaño (piedrecillas y maíz) y pequeñitos (tierra y arena) a fin de preparar el terreno para la introducción del concepto de fracción. Finalmente, se infiere de los dibujados que los niños habían comprendido el significado de equilibrio, no solo como término; sino, también, como una abstracción cognitiva que ayuda a la comprensión de los conceptos de igualdad y desigualdad.

3. Resultados.

Para Ausubel (2019), el aprendizaje significativo es la adquisición de conocimientos nuevos, en donde la concatenación de tal nuevo conocimiento con los anteriores, juega un papel muy importante; sin embargo, en nuestro caso, el aprendizaje significativo es la aprehensión de la idea o concepto, como dato primero e indispensable del ejercicio del pensamiento. A este

proceso de aprehensión, se le denomina también aprehensión inteligible, para diferenciarla de la aprehensión sensible que consiste, básicamente en la aprehensión de una imagen. En el ejercicio docente ambos tipos de aprehensión no son excluyentes, sino complementarios. Desde luego, cuando la aprehensión inteligible es efectiva, el educando tiene los elementos para establecer relaciones, y en el mejor de los casos, juicios. En el contexto planteado, se mostrarán los resultados que se han obtenido con la aplicación de la estrategia de enseñanza y aprendizaje que se ha propuesto.



Figura 2

Primeramente, cuando, de inicio, se les preguntó a los niños si sabían lo que era una balanza y sólo uno contestó afirmativamente, trayendo a mención el parecido con un balancín, en este proceso mental recurrió a su conocimiento anterior y construyó su aprehensión sensible, al tiempo que contribuyó a que sus compañeros, construyeran la propia. Como ya se mencionó, el propósito del método era la disposición del concepto matemático de igualdad, a través de la comprensión del concepto de equilibrio, apantallado con dos atributos de la gamificación: la diversión y la experimentación. Por esta razón, se les entregó el juguete como un rompecabezas y se les dejó libres para que dispusieran lo que quisieran; así que, armaron pirámides normales, pirámides invertidas, un tobogán, un puente y figuras geométricas como producto de su imaginación, i.e., sin parangón cotidiano. Esta es una manifestación de enlace de conocimientos; pues, seguramente, algunos niños ya habían visto pirámides, puentes y toboganes; pero, también, al crear figuras irreales, ponen al descubierto su impulso de aventura en la generación de nuevo conocimiento. A esta edad, esto es laudable.

Después de haber armado la balanza, comenzaron a experimentar con la idea de conseguir ponerla en equilibrio con los objetos que tenían a su alcance. Lo primero que hicieron fue llenar todos los huecos de la balanza con piedrecillas; seguramente, su intuición los indujo a comenzar así su experimento. Sin embargo, descubrieron que no lo conseguían colocando objetos de diferente peso o acomodados en orificios antisimétricos de la regleta. Entonces, como primera opción, intercambiaron los objetos de lugar; posteriormente, dejaron huecos vacíos, pero, cuando se les dio el maíz y las canicas, solventaron la dificultad. Con estas actividades descubrieron que debían colocar las canicas a la misma distancia del centro y,

cuando no lograron el equilibrio completo y tuvieron que utilizar maíz, entonces, se dieron cuenta que las canicas no pesaban lo mismo y necesitaban fracciones de la unidad, la canica en este caso, por eso utilizaron maíz. Debe señalarse, además, que lograron el equilibrio respetando el brazo de palanca con objetos del mismo peso; pero también con objetos de diferente peso y con diferentes brazos de palanca.

La primera apreciación que se tuvo del grupo, fue la curiosidad, la cual los impulsó a manipular las piezas del rompecabezas. Cabe resaltar que se motivaron estupendamente a tal grado que no quisieron dejar la actividad hasta terminar el tiempo asignado a la clase. Asimismo, observamos que los niños mostraron confianza, autonomía, decisión y desarrollo psicomotriz fino; pero era necesario cerciorarnos de la efectividad de la aprehensión inteligible del concepto físico-filosófico de equilibrio y su asociación con el concepto de igualdad. Entonces, se les solicitó un dibujo de la balanza en equilibrio, el cual todos entregaron. Nadie entregó dibujo con balanza fuera equilibrio; luego entonces, se puede tomar el dibujo como evidencia de conformidad entre la percepción y afirmación del concepto de equilibrio.

La pregunta ¿Por qué no está en equilibrio la balanza? con las respuestas que se proveyeron, en su propio lenguaje, como: “porque esta cubetita pesa más que la otra”; o bien, “porque aquí tiene menos y acá tiene más”, refiriéndose a la cubetita con menos maíz, son prueba fehaciente de que el niño es capaz de establecer relaciones. Enseguida, con la pregunta ¿Qué tienes que hacer para que la balanza quede en equilibrio? con la correspondiente respuesta activa de poner la balanza en equilibrio quitando y poniendo maíz, más la pregunta ¿Cómo quedaron las cubetitas? con sus respuestas “iguales”; así como “lo que tiene aquí es igual a lo que tiene allá” son manifestación expresa de que el niño, después de la práctica fue capaz de establecer juicios. En consecuencia, el método funciona para proveer al niño de preprimaria, conocimiento significativo y coadyuva al desarrollo del pensamiento matemático.

4. Discusión

En este apartado describiremos los resultados, obtenidos a partir de un análisis cualitativo, centrado en la serie de valores que los niños mostraron durante el desarrollo de la dinámica; entre ellos, es importante resaltar las actitudes de observación y de reflexión, así como su comportamiento ante el nuevo conocimiento; todo ello, en el marco del objetivo planteado. El utilizar un juguete didáctico y desarrollar la propuesta como un juego, provoco que los niños mostraran un abanico de valores. De acuerdo al avance del juego, observamos lo siguiente: el trabajo por pares motivo la socialización, el respeto a la opinión del otro, pues el uno se quedaba callado escuchando cuando el otro hablaba; se generó trabajo colaborativo entre ellos; además, se despertó la curiosidad.

Durante el proceso de cada una de las actividades que componen la estrategia de enseñanza y aprendizaje planteada, se han obtenido resultados positivos; pues el niño se motiva a jugar, tratando de satisfacer su curiosidad, y experimentando con la balanza; la cual fue manipulada llenando los huecos y las cubetas con los diferentes materiales que encontró en el aula, en su mochila o en el patio de la escuela hasta que descubrió por sí mismo cuándo la balanza se encuentra en equilibrio. La seriación de cada actividad que realiza el niño genera un proceso cognitivo gradual en el desarrollo del pensamiento algebraico; pues el juguete, obedece uno de los cánones de la gamificación: apantallar el conocimiento que se desea transmitir con la

diversión. Al finalizar cada una de las sesiones, los niños estaban muy contentos, lo cual se podría interpretar como una manifestación de motivación para experimentar con el juguete. En efecto, jugaron mucho hasta lograr poner la balanza en equilibrio; pero esto no es suficiente para asegurar que hayan comprendido el concepto de equilibrio y su relación con el concepto matemático de igualdad, que era el objetivo que se perseguía. En consecuencia, queda pendiente el diseño de una estrategia de medición de la alegría, satisfacción y felicidad del niño en la adquisición del conocimiento.

Se debe resaltar que, para poder lograr el éxito de la estrategia es importante que el docente tenga presente los cocimientos previos que posee el niño, organice al grupo formando pares, así como los materiales necesarios. Además, es fundamental darles libertad para que los niños jueguen solos y no se debe intervenir en lo que están haciendo; de esta manera, aprende a tomar decisiones propias sin temor a equivocarse. Terminada la actividad, todos los niños entregaron a la maestra sus dibujos y por falta de espacio no se muestran todos, pero absolutamente todos los niños entregaron sus dibujos con buenos resultados: la balanza dibujada en equilibrio.
El haber entregado canicas y dejarlos lograr el equilibrio con maíz y arena, se hizo con la intención de encaminar al niño a concebir la diferencia entre un entero y una fracción; así como la diferencia entre una cantidad grande, una mediana, una pequeña y una más pequeña, estableciendo así el concepto de relación. Para terminar, es necesario señalar que no se tomaron algunas fotografías para mostrar como combinaron canicas, maíz, arena y tierra hasta lograr poner el equilibrio la balanza. La filmación de la aplicación completa de la estrategia hubiera sido maravillosa.

5. Conclusiones

En el contexto descrito en el parágrafo 1.1, se implementó una propuesta de aprendizaje para niños de preescolar sobre el concepto de equilibrio con miras a asociarlo con el concepto de igualdad en matemáticas. Ursini y Trigueros (2006) mencionan que, incluso a nivel profesional, los estudiantes, aún a pesar de haber aprendido muchos algoritmos, tienen dificultades para entender los significados inherentes al álgebra, principalmente en donde tienen que manejar el significado de incógnita o variable independiente de una función. Pero, sobre todo para resolver ecuaciones, lo cual implica que no han adquirido, a lo lardo de su formación previa, un pensamiento algebraico adecuado; ya que sus profesores tampoco lo han tenido. Nuestra experiencia, nos ha mostrado la dificultad que tienen los profesores para comprender que, en una ecuación, el miembro de la izquierda es igual al de la derecha y dicha igualdad se debe mantener, aunque se manipule la ecuación. Si la ecuación contiene fracciones, la perplejidad aumenta, pero, si están presentes tanto fracciones como funciones trigonométricas, la confusión es mucho mayor.

Los mismos autores señalan la necesidad de pasar revista a los conceptos del álgebra y reflexionar sobre ellos hasta conocerlos, ordenando sus intuiciones y dando contenido a sus conceptos y pensamientos. Conviene agregar que, tanto el proceso de revisión y análisis, como el de reflexión hasta llegar al conocimiento, deben ser permanentes hasta transmutar los conceptos del álgebra, a veces inconexos, en un aprendizaje significativo, pero, además, se debe comenzar desde temprana edad. Skovsmose y Valero (2012) hacen alusión sobre la necesidad de poner a disposición de la población las ideas matemáticas poderosas --aunque no

lo dicen explícitamente, se infiere que es a través de las TIC, principalmente—a fin de contribuir a la consolidación de una *sociedad informacional* y disminuir la brecha entre el primero y el cuarto mundos – los excluidos--. Sin embargo, es necesario acotar que, cuando no existen las condiciones para extender las ideas a través de las TIC, se debe comunicar el conocimiento por cualquier medio, guardando el compromiso de disminuir la brecha mencionada.

En un trabajo previo, Ursini (1994) señala la necesidad de crear ambientes propicios para el aprendizaje de conceptos matemáticos antes de comenzar los estudios formales del álgebra. En un trabajo posterior, Ursini y Ramírez (2017) reportan, además, factores que propician la inequidad de género en la enseñanza de las matemáticas. Forgasz et al. (2014), (citando a Fenemma) arguyen que la equidad consiste en tener igualdad de oportunidades, igualdad de tratamiento e igualdad de resultados. En el marco de estas acotaciones, debe señalarse que la distribución de los niños en las mesas, antes de iniciar el juego con la balanza, la hizo la maestra del grupo de manera indistinta y no dio pie a discriminación alguna; pues todos tuvieron la oportunidad de jugar, fueron tratados igual cuando lograron armar la balanza y todos pudieron armar la balanza, i.e. el resultado fue igual. En consecuencia, consideramos pertinente un estudio para ubicar la discriminación en el proceso formativo del estudiante, pero, por el momento, a nivel de preprimaria, en esta experiencia no estuvo presente.

De acuerdo a las evidencias que se tienen, sobre la aplicación de la estrategia, los resultados fueron exitosos; la propuesta se fundamentó en la construcción de una balanza cortada en madera como rompecabezas. El mismo dispositivo se puede utilizar para extender la estrategia con estudiantes de nivel primaria, secundaria, preparatoria y nivel medio superior; naturalmente con objetivos de enseñanza de otro nivel, así que, en el presente trabajo, sólo se da cuenta de su aplicación en preprimaria. A nivel de primaria, con otra regleta se pueden enseñar las operaciones básicas, quebrados y manejo de fracciones. Para años más avanzados, en la clase de física se puede utilizar para calcular densidades, relaciones masa-volumen y brazo de palanca, entre otros posibles y que están en estudio y se reportarán más adelante. La parte medular de la propuesta es el diseño y construcción en madera de un objeto lúdico que el niño pueda manipular sin riesgos y para que se divierta construyendo lo que quiera con miras a desarrollar el pensamiento algebraico. Otro resultado que obtuvimos fue la motivación manifiesta del niño para buscar respuestas a sus cuestionamientos personales sobre el conocimiento físico-matemático, claro está que a su nivel. Asimismo, la aplicación de esta estrategia didáctica coadyuva al desarrollo de valores en los niños como el trabajo en equipo, la tolerancia, socialización y los induce a observar, razonar y desarrollar habilidades psicomotrices finas, a jugar con sus pares y a tomar decisiones propias.

Agradecimientos. Uno de los autores (FCC) agradece, en primer lugar, a su esposa A. Natividad Flores P., a sus hijos Daniel, Libertad e Iván por haber sobrellevado todas las horas de ausencia en la realización del trabajo. En especial, vaya nuestro agradecimiento a las profesoras Cecilia Rivera A., Brenda Ivonne R. y al Profesor Jorge Itai B. quienes apoyaron poniendo a nuestra disposición los grupos para llevar a cabo la parte práctica del presente trabajo. Finalmente, vaya también nuestro agradecimiento al árbitro anónimo que revisó el trabajo; pues sus comentarios y aportaciones sirvieron para enriquecerlo.

Referencias Bibliograficas.

Ausubel, D. P., Novak, J. D., y Hanesian, H. (2019). *Psicología Educativa un punto de vista cognoscitivo*. México: Editorial Trillas.

Butto, C., y Rojano, T. (2010). Pensamiento algebraico temprano: El papel del entorno Logo. *Educación Matemática*, *22*(3), 55-86.

Celis, M., Sánchez, J. M., Martínez, M., Soberanes, A., y Juárez, C. (2014). Estilos de aprendizaje de acuerdo a la teoría de cuadrantes cerebrales en estudiantes del centro universitario UAEM valle de Chalco. *El Cálculo y su Enseñanza, Enseñanza de las Ciencias y la Matemática*, *5* (5), 143-145.

Corona, M.G., Romero, F. y Romano, R. (2019). Contextualización de la concepción unamuniana de asignatura en la enseñanza de la física y las matemáticas en un país emergente. (enviado).

Cuevas, C. A., Martínez, M., y Pluvinage, F. (2012). Promoviendo el pensamiento funcional en la enseñanza del cálculo: Un experimento con el uso de Tecnologías digitales y sus resultados. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 17,* 143.

Cruz, F., Báez, J. J., y Corona, M.G. (2018). Estrategia de enseñanza y aprendizaje para el estudio de los elementos característicos de la parábola. *El cálculo y la Enseñanza Enseñanza de las Ciencias y la Matemática, 11,* 62-82.

Díaz, F., y Hernández, G. (2002). *Estrategias de enseñanza para la promoción de aprendizajes significativos. Una interpretación constructivista*. México: Mc Graw Hill.

Durón, A. C., León, G., y Hernández, M. (2011). Jugando con las ecuaciones: La magia del material concreto. *XIII Conferencia interamericana de educación matemática (CIAEM)* (pp. 1-3). Recife, Brasil.

Duval, R., y Sáenz-Ludlow, A. (2016*). Comprensión y aprendizaje de las matemáticas perspectivas semióticas seleccionadas.* Doctorado interinstitucional de educación.

Gallego, C., y de Pablos, C. (2013). La gamificación y el enriquecimiento de las prácticas de innovación en la empresa: un análisis de experiencias. *Intangible Capital*, *9*(3), 800-822.

Forgasz, H. J., Colleen, V., y Ursini, S. (2014) Technology for Mathematics Education: Equity, Access and Agency. *Mathematics Education and Tecnology-Rethinking the Terrain, Hoyles, C.and Lagrange, J.-B. (eds.)* 385-403.

Gallego, F., Molina, R., y Llorens, F. (2014) Gamificar una propuesta docente diseñando experiencias positivas de aprendizaje. *XX Jornadas sobre la Enseñanza Universitaria de la Informática*.

Escobar, F. (2006*).* Importancia de la educación inicial a partir de la mediación de los procesos cognitivos para el desarrollo humano integral, *Laurus 12*(21), 170-185.

Madrid, H., y Flores, M. (2017). *El álgebra lineal en el entorno personal de las peticiones a internet* (recomendaciones a: música, películas, libros, compras etc.). El cálculo y la Enseñanza Enseñanza de las Ciencias y la Matemática, 9, 64-76.

Martínez, G. (2017). *Tecnologías y nuevas tendencias en educación: aprender jugando. El caso de Kahoot,* Opción 33 (83), 252-27.

Medrano, A. (2015*).* Álgebra y solución de problemas aditivos en primaria. *Revista electrónica en Ciencias Sociales y Humanidades Apoyadas por Tecnologías, 4*(7), 14-14.

Moreira, M., A. (2005). Aprendizaje significativo crítico. *Indivisa. Boletín de Estudios e Investigación, 6,* 83-90.

Moreira, M., A. (2017). Aprendizaje significativo como un referente para la organización de la Enseñanza. *Archivos de Ciencias de la Educación*, *11*(12), 83-97.

Muñoz, C. (2014). *Los materiales en el aprendizaje de las matemáticas*. Publicado por la Universidad de la Rioja. publicaciones. unirioja. es

Pimienta Prieto, J. H. (2012). *Estrategias de enseñanza-aprendizaje, docencia universitaria basada en competencias.* México: PEARSON EDUCACIÓN.

Rodríguez, M., E. (2010). La matemática: ciencia clave en el desarrollo integral de los estudiantes de educación inicial. *Revista. Zona Próxima*, 13.

Secretaria de educación Pública (2017). Educación preescolar plan y programas de estudio 110-114. Recuperado 17 febrero 2019 de https://www.planyprogramasdestudio.sep.gob.mx/.../preescolar/1LpM-Preescolar-DIGIT

Skovsmose, O., y Valero, P. (2012). *Acceso democrático a ideas matemáticas poderosas*. Educación Matemática crítica. Una visión sociopolítica del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. Valero, P y Skovsmose, O. (Compiladores). Universidad de los Andes, Centro de Investigación y Formación en Educación (CIFE) (pp.2561); Universidad de Aalborg, Departamento de educación y Filosofía.

Serres, M. (2013). *Pulgarcita.* México: Fondo de Cultura Económica.

Soto, F., Mosquera, S., y Gómez, C. P. (2005). *La caja de polinomios.* Matemáticas: Enseñanza Universitaria, XIII (1), 83-97.

Ursini, S. (1994), Los niños y las variables, *EDUCACION MATEMATICA, 6*(3), 91-107.

Ursini, S., y Trigueros M. (2006), ¿Mejora la comprensión del concepto de variable cuando los estudiantes cursan matemáticas avanzadas? *Educación Matemática*, *18*(3), 5-38.

Ursini, S., y Ramírez, M. (2017), Equidad, género y matemáticas en la educación mexicana. *Revista Colombiana de Educación, (73)*, 211-232.

Villarroel, S., y Sgreccia, N. (2011). Materiales didácticos concretos en geometría en primer año de secundaria. *Números*, *Revista de didáctica de las matemáticas, 78*, 73-94.

Una propuesta didáctica para mejorar la comprensión del concepto de límite de una función

Eloisa Benitez Mariño & J. Rigoberto Gabriel Argüelles

Facultad de Matemáticas, Universidad Veracruzana, México

elobenitez@uv.mx & jgabriel@uv.mx



Fecha de Recepción:20 de enero 2020
Fecha de Aceptación: 23 de marzo 2020
El Cálculo y su Enseñanza, Enseñanza de las Ciencias y la Matemática.
Volumen 14. Enero - Junio 2020.
Cinvestav-IPN © Ciudad de México. ISSN 2007-4107 P.p.16-29.

Resumen. Este escrito forma parte de un trabajo de investigación en Matemática Educativa dirigido a caracterizar conceptos básicos del Cálculo. Este artículo es el resultado de un estudio longitudinal con distintos grupos de estudiantes del nivel universitario y posgrado, donde se observan dificultades para trabajar apropiadamente el concepto de límite de una función real. Después de una revisión de algunas publicaciones que abordan este tema, se determinó utilizar como marco referencial, las ideas sobre imagen y definición del concepto dadas por Tall y Vinner (1981), para elaborar una secuencia de actividades didácticas, con apoyo de un Software de Geometría Dinámica (SGD). Las actividades logran favorecer la comprensión del concepto de límite de una función lineal y dan como resultado una imagen mental más rica en los estudiantes.

Palabras Clave: Límite de una función, imagen del concepto, definición del concepto.

Abstract. This writing is part of a research work in Educational Mathematics aimed at characterizing basic concepts of Calculus. This article is the result of a longitudinal study with different groups of university and postgraduate students, where difficulties are observed to work properly these concepts. After a review of publications related to the subject, it determined to use the referential frame "Concept Image" and "Concept Definition" of Tall and Vinner (1981), to elaborate a series of didactic activities, which are supported by a Software of Dynamic Geometry. These activities help to promote the understanding of the limit concept of a linear function and result in a richer mental image in students.

Keywords: Limit of the function, Concept Image, Concept Definition.

1. Introducción

Uno de los conceptos centrales del Cálculo es el límite de una función, debido principalmente a que la derivada de una función se define como el límite del cociente de Newton, luego la derivada se asume como un límite. El concepto de límite ha sido abordado por educadores y didactas de la Matemática, los cuales han encontrado una serie de problemas y errores que cometen los estudiantes de los diferentes niveles de educación, cuando trabajan con este concepto.

Sierra, Gonzáles y López, (1999) estudian el desarrollo histórico del concepto de límite funcional en libros de bachillerato y de los cursos de orientación universitaria, de 1940 a 1995. Para el estudio consideran tres dimensiones: conceptual, cognitiva y fenomenológica.

Espinoza y Azcárate (2000) usan el enfoque antropológico y didáctico de Chevallard para proponer una metodología de investigación, para el análisis de las organizaciones matemáticas recreadas por los maestros en el salón de clases en colaboración con sus alumnos y la respectiva organización didáctica que permite su reconstrucción. De los resultados más representativos referente a los profesores están: que sus organizaciones matemáticas entorno a los límites de funciones poseen en esencia las mismas características. Obedecen a la única cuestión del cálculo de límites de funciones, partiendo de la base que éste existe o es infinito (o mínimo, de que existen o son infinitos los límites laterales). Se asume que el límite de una función en un punto es algo calculable (aunque pueda valer infinito) y el problema radica en realizar dicho cálculo.

2. Justificación

Se conoce que se usa el concepto de límite para aproximar o intuir hacia donde se acercan los valores de una función, cuando un número se aproxima a otro. En la historia de la matemática se encuentra que en la formalización del concepto de límite, atribuible a Karl Weierstrass, hubo definiciones intuitivas que consideraron varias nociones preliminares de límite. Por ejemplo, la idea acerca de definir el límite de una función de Newton, se localiza en el impreso Philosophiae naturalis principia mathematica, enunciada de la siguiente manera: "Cantidades, y la razón de cantidades, que en cualquier intervalo finito de tiempo convergen continuamente a la igualdad, y antes del final de dicho tiempo se aproximan una a la otra más que cualquier diferencia dada, se hacen finalmente iguales" (Durán, 1996, p. 54).

La idea de límite que D'Alembert presenta es, "a una cantidad se le llama el límite de una segunda cantidad variable si la segunda puede aproximarse a la primera hasta diferir de ella en menos que cualquier cantidad dada, sin llegar nunca a coincidir con ella" (Durán, 1996, p. 56).

Por otra parte, Cauchy muestra una definición de límite, casi tan formal como la definición que se localiza en los libros contemporáneos de cálculo y análisis matemático. Para Cauchy, cuando los sucesivos valores que toma una variable se aproximan de manera indefinida a un valor fijo, de tal forma que terminan por diferir de él en tan poco como se quiera, este último valor se llama el límite de todos los demás. Cauchy, a diferencia de sus antecesores que consideraron un infinitésimo como un número constante muy pequeño, lo

define como una variable. Él mencionaba que una cantidad variable se hace infinitamente pequeña cuando su valor numérico disminuye indefinidamente de manera que converge hacia el límite cero. Se sabe que en el cálculo de Cauchy los conceptos de función y de límite son los conceptos fundamentales (Ídem).

La interpretación que hace Boyer (1996) es que Weierstrass, contribuyó al programa de aritmetización del análisis con una definición satisfactoria de número real, además de una definición depurada del concepto de límite, precisando la definición dada por Cauchy. En los Elementos de Heine, escritos bajo la influencia directa de las lecciones de Weierstrass, definió el concepto de límite de una función $f(x)$ en x_0 de la siguiente manera: Si, dado cualquier ε, existe un η_0 tal que para $0 < \eta < \eta_0$, la diferencia $f(x_0 \pm \eta) - L$ es menor en valor absoluto que ε, entonces se dice que L es el límite de f(x) para $x = x_0$. En la definición formal, usada actualmente, la η de Weierstrass y Heine es sustituida por δ. De lo anterior, se puede concluir que dar la definición formal de límite, llevó varios años y tuvo que pasar por un proceso de varias definiciones un tanto informales, hasta finalmente llegar a una definición abstracta.

En los cursos universitarios, por lo regular se parte de la definición de Weierstrass y se busca que el estudiante tenga un dominio, tanto analítico, como algebraico del concepto de límite, sin embargo, la mayoría de los estudiantes no tienen una adecuada imagen mental, que les permita comprender la definición. Por lo tanto, se puede conjeturar que el estudiante debe pasar por acercamientos numéricos y gráficos (de manera análoga como sucedió con el pensamiento de los matemáticos), que lo ayuden en el trabajo simbólico y analítico de la definición de límite de una función.

Se ha observado que algunos estudiantes que tomaron varios cursos de cálculo en el nivel universitario, aún no poseen una comprensión adecuada de la definición del límite de una función. Para mostrar esto, se trabajó con un grupo de estudiantes de una Licenciatura en Matemática, a estos alumnos se les enumeró del uno al ocho. La situación que se les planteó es que muestren que $\lim_{x \to 1} 3x - 1 = 2$, usando la definición formal.

A continuación se dan algunos ejemplos de las respuestas de estudiantes de licenciatura. Un estudiante presenta inconsistencia al tomar como solución un caso particular $(\varepsilon = 0{,}1\ y\ \delta = 1/30)$. Otro estudiante también recurre a un caso particular como solución $(\varepsilon = 0.3\ y\ \delta = 0.15)$. Algunos estudiantes parten de lo que quieren mostrar y su expresión simbólica no ilustra la definición de límite, recurren a métodos algebraicos para encontrar la relación entre ε y δ, no obstante, no pueden expresar su idea con claridad, ver Figura 1.

Figura1: Demostración realizada por un alumno de licenciatura

Una actividad similar se realizó con estudiantes de una maestría en Matemática Educativa. Los estudiantes eran profesores de Matemáticas, en activo, de los niveles de secundaria y bachillerato. La mayoría había tomado cursos de Cálculo. Se les indicó que usando la definición de límite de una función, probarán que $\lim_{x\to-3}\frac{x}{2}+6=\frac{9}{2}$. Algunos estudiantes sustituyeron el valor de -3 en la expresión, posiblemente recordando el cálculo de límites que hicieron en sus cursos, ver Figura 2. También se puede observar que no manejan, del todo, el concepto de valor absoluto, al eliminar las barras de valor absoluto y solo tomar los valores para los cuales $x + 3 > 0$.

Un estudiante realiza operaciones algebraicas y encuentra una relación para δ en término de ε, esta es: $\delta = 2\varepsilon - 3 > 0$. Sin embargo, el estudiante afirma que δ es positiva, lo cual no es necesariamente cierto. Más aún, no entendió que δ debe tender a cero, cuando ε tienda a cero, ver Figura 3.

Secundaria
Lic. en educ. secundaria con especialidad en matemáticas

Ejemplo 1

Estudiante No. ___1

Definición formal de límite de una función:

Decimos que $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$, cuando dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$, tal que si $0 < |x - x_0| < \delta$ se tiene que $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Utilizando la definición de límite de una función, mostrar lo siguiente:

$$\lim_{x \to -3} \left(\frac{x}{2} + 6\right) = \frac{9}{2}$$

$0 < |x - (-3)|$

$0 < |x + 3|$

$0 < x + 3$

$\frac{-3}{2} + 6 = \frac{9}{2}$

$\frac{-3}{2} + \frac{12}{2} = \frac{9}{2}$

$\frac{9}{2} = \frac{9}{2}$

Figura 2: Actividad Realizada por un estudiante de Maestría

Los ejemplos anteriores muestran, que aun cuando se han tomado varios cursos de cálculo, los estudiantes pueden no tener una comprensión adecuada de la definición de límite. También los ejemplos nos indican lo complicado que puede ser, tratar de mostrar que un límite existe, aunque sea para el caso concreto de una función lineal. Por lo tanto, surge la necesidad de establecer nuevos mecanismos de enseñanza-aprendizaje para el concepto de límite, donde el estudiante sea capaz de entrar en contacto con diferentes representaciones del concepto y así tener una mejor Imagen Conceptual de éste.

ACT 2

Ejemplo 1

$0 < |x - x_0| < 2\varepsilon - 3$

$|x + 3| < 2\varepsilon - 3$

Estudiante No. 5

Definición formal de límite de una función:

Decimos que $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$, cuando dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$, tal que si $0 < |x - x_0| < \delta$ se tiene que $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Utilizando la definición de límite de una función, mostrar lo siguiente:

$$\lim_{x \to -3} \left(\frac{x}{2} + 6\right) = \frac{9}{2}$$

$$\left|\frac{x}{2} + 6 - \frac{9}{2}\right| = \left|\frac{x}{2} + \frac{3}{2}\right| = \left|\frac{x+3}{2}\right| < \varepsilon$$

$$\frac{|x+3|}{|2|} < \varepsilon \Rightarrow |x+3| < 2\varepsilon$$

$$x < 2\varepsilon - 3$$

Dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta = 2\varepsilon - 3 > 0$, tal que si $0 < |x+3| < 2\varepsilon - 3$ se tiene que: ?

$$x + 3 + 3 < 2\varepsilon \Rightarrow x + 6 < 2\varepsilon$$

$$\Rightarrow \frac{x+6}{2} < \varepsilon \Rightarrow \frac{x}{2} + 3 < \varepsilon$$

Figura 3: Actividad Realizada por un estudiante de Maestría

3. Marco Referencial

En el concepto de límite, Blazquez y Ortega (2001) consideran cuatro sistemas de representación: verbal, numérico, gráfico y simbólico, ellos realizan un estudio con alumnos entre 17-18 años sobre la noción de límite. En su trabajo hacen un análisis de libros de texto y diseñan un sistema de categorías apropiado, formulan como hipótesis que la utilización de diferentes registros mejora la comprensión del concepto de límite. Estos autores dan una nueva conceptualización de límite funcional e investigan el papel que ocupa en la enseñanza la representación de éste. Además, enfatizan que el aprendizaje del concepto de límite choca con las dificultades del cambio de sistema de representación (puede ser un registro de representación) y que el uso de distintas representaciones favorece el aprendizaje o permite que los alumnos se formen una representación interna más rica.

Blázquez, Ortega, Gatica y Benegas (2006) comparan la conceptualización métrica de límite atribuida a Weierstrass, con la conceptualización como aproximación óptima. Ellos utilizan el marco teórico de Duval, en el cual se establece que para comprender un concepto es necesaria la coordinación de los diferentes registros de representación (lenguaje común, lenguaje aritmético, lenguaje algebraico, esquemas gráficos, etc.), pues con uno solo, no se obtiene la compresión integral del concepto.

Blazquez y Ortega (2001) mencionan en su escrito a Romero, para el que la comprensión se caracteriza a partir de una serie de actividades asociadas a los sistemas de representación. Estos autores consideran importante lo mencionado por Rico, indicando que son muchos los investigadores que han puesto de manifiesto la necesidad, de utilizar distintas representaciones de un mismo concepto para captar la complejidad del mismo. Esto es así, porque los sistemas de representación se complementan, muestran distintos aspectos del concepto o los mismos, con mayor o menor claridad, además de que todos ellos son limitados y necesitan de otros.

Blazquez y Ortega (2001), consideran que la noción de representación es necesaria para pensar y razonar sobre ideas matemáticas, para esto es necesario obtener representaciones internas de estas ideas y para comunicarlas se necesitan representaciones externas por medio de signos. De lo anterior podemos establecer que las representaciones internas se desarrollan al interiorizar las representaciones externas.

En Frawley (1999), se considera la acción situada, donde la mente se apoya directamente del mundo exterior y ésta escuela de pensamiento de la ciencia cognitiva se fundamenta en la teoría Vygotskyana, que considera que parte de ese apoyo es mediada por representaciones simbólicas, internas y sociales. Además, Frawley menciona que el pensamiento superior se obtiene mediante la interiorización de cualquier sistema simbólico, y considera que el habla es una herramienta para el pensamiento superior, donde el habla es un lenguaje para el pensamiento, no un lenguaje del pensamiento.

Si consideramos que el habla da lugar a proponer conjeturas, entonces la conjetura es una herramienta para el desarrollo del pensamiento superior. Por lo tanto, la conjetura puede desarrollarse en los estudiantes, en base al tratamiento de diferentes representaciones de un concepto, en particular, representaciones gráficas, numéricas y simbólicas.

El trabajo de Tall y Vinner (1981) ha influido notablemente en el estudio de la imagen conceptual o idea de los conceptos matemáticos. En su escrito reportan varias investigaciones que muestran que las imágenes conceptuales individuales que tienen los estudiantes difieren de la teoría formal y contienen factores que causan conflictos cognitivos. Su trabajo hace énfasis al concepto de límite y continuidad.

De acuerdo con Frawley (1999), en matemáticas los estudiantes necesitan estar en contacto con las representaciones simbólicas, por lo tanto, se deben diseñar actividades que acerquen a éstos al objeto de estudio. Lo anterior con base en que una actividad se puede analizar de acuerdo con los objetivos, razones y significados asociados por los estudiantes. Para este autor, la tecnología digital nos ayuda a tener diferentes representaciones de un concepto y estas pueden ser utilizadas para que los estudiantes dispongan de algunas herramientas que les permitan interiorizar la definición de límite. Más aún, una diversificación de las representaciones de un mismo objeto, aumenta las capacidades cognitivas de los sujetos (a modo de ejemplo ver Duval, 1999; Contreras, Luque y Ordoñez, 2004).

Para Gutiérrez y Boero (2006), la tecnología puede ser usada para explorar, conjeturar y probar conjeturas, para validar una sentencia encontrada y para expresar la idea matemática de una manera formal. Además mencionan que el interés de la investigación y el centro de la enseñanza han empezado a enfatizar la construcción de sentido, más que la manipulación simbólica. Las maquinas por sí solas no pueden conjeturar, argumentar, razonar, probar o

justificar los pasos, sin embargo, en un software de Geometría Dinámica, los estudiantes pueden construir figuras desde las más simples hasta las más complejas, con tan solo combinar objetos geométricos fundamentales, por ejemplo, puntos, ángulos, segmentos, círculos, planos, sólidos y transformaciones, crear expresiones al usar conceptos algebraicos fundamentales, como números, variables y operaciones.

Un software de Geometría Dinámica (SGD) es accesible para los usuarios y permite la conexión de la geometría con el álgebra a través de la medida de longitud, ángulos, área, volumen y adjuntar valores numéricos directamente a la figura, para usarlos en cálculos o en expresiones e interpretaciones algebraicas que permitan verificar la parte geométrica o comprobar conjeturas. También es fácil explorar propiedades de figuras manipulando sus elementos variables. Observar los efectos de transformaciones dinámicas como contraer o reducir y ampliar, además es posible conjeturar acerca de propiedades algebraicas o geométricas y verificar relaciones entre varias partes de la figura, todas estas características pueden ser consideradas como algunas herramientas de enseñanza-aprendizaje. En este trabajo mostraremos que es además posible conjeturar relaciones e intuir sobre definiciones y verificarlas, usando un SGD.

A su vez el maestro puede crear actividades que faciliten la introducción y entendimiento de nuevos conceptos en los alumnos, promover el descubrimiento de teoremas, en lugar de solamente mostrarlos y ayudar a modelar situaciones de la vida real o situaciones interdisciplinarias, entre otras cosas. Además, es posible presentar actividades a los estudiantes que les permitan manipular figuras, observarlas o visualizarlas (en el sentido de Zimmerman y Cunningham ,1991) y usarlas de guía, el software utilizado en esta investigación, permite una mejor valoración de la comprensión individual del estudiante, respecto a la definición formal de límite de una función.

4. Metodología

El objetivo de este trabajo es proponer una serie de actividades usando un SGD, que apoya en la comprensión de la definición de límite para funciones lineales, para esto, se consideran algunas representaciones del concepto de límite, las cuales apoyaran al estudiante a tener una mejor imagen y definición del concepto, dado que cada sistema de representación y distintos registros de representaciones identifican al objeto de estudio. Lo anterior, se puede lograr mediante la implementación de tres tipos de tareas, que toman como base la siguiente definición: el límite de una función $f(x)$ cuando x tiende a x_0 es L, si dado $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$, tal que si $0 < |x - x_0| < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Por no manipular variables, es un trabajo no experimental descriptivo, las tareas se describen considerando las representaciones externas y se usa como técnica el análisis de tareas (ver Bisquerra, 1989). A la fecha, la observación se ha realizado con muestras casuales de estudiantes de licenciatura y maestros de Secundaria y Bachillerato, es decir, los sujetos son diferentes para contrastar los resultados. Los indicios encontrados apuntan a que las diferentes representaciones de la definición de límite hacen accesible su formalización.

El procedimiento consistió en la elaboración y aplicación de cinco actividades. De la actividad uno a la cuatro, se realizan tres tareas (A, B, C) y la actividad cinco incluye dos tareas (B y C). Inicialmente se elaboraron las tareas, luego se analizaron, describiendo e indicando las representaciones como requisitos significativos para la realización de las tareas.

A través del empleo de representaciones gráficas-numéricas (Tarea A), los sujetos, a través de preguntas, pueden conjeturar verbalmente y por escrito la definición de límite (Tarea B) e incluso hacer representaciones simbólicas-analíticas de la definición (Tarea C).

5. Actividades didácticas

Se elaboraron cuatro actividades en un software de Geometría Dinámica. En cada actividad se trazaron los ejes coordenados y la gráfica de una función lineal. Después, en el eje de las abscisas se localizó el número x_0. Trazando un segmento perpendicular al eje de las abscisas, que inicie en el punto (x_0,0) y que intersecte a la gráfica de la función lineal, se localizó en el eje de las ordenadas el posible límite de la función y_0= L).

En el punto (0, y_0) se traza una circunferencia de radio ε. Las coordenadas "y" de los puntos de intersección de esta circunferencia con el eje Y y se denotan por y_1 e y_2. Utilizando segmentos horizontales y verticales se encuentran las imágenes inversas de y_1 e y_2, bajo la función lineal. Estas imágenes inversas son denotadas por x_1 e x_2. Después se traza una circunferencia con centro en (x_0,0) radio $\delta = |x_1 - x_0|$ y también se observa que se cumple $\delta = |x_2 - x_0|$.

En la primera actividad se trabaja con $\lim_{x \to 6} x$. Se construye la Figura 4, junto con los estudiantes, se hace variar el segmento de longitud ε, ubicado en el eje de las ordenadas y se observa que el segmento de longitud δ, ubicado en el eje de las abscisas también varía, más aún se constata numéricamente que $\delta = \varepsilon$. Los números x_1 y x_2 que corresponde a los extremos del segmento de longitud 2δ, se asocian con los números y_1, y_2 respectivamente, que son los extremos del segmento de longitud 2ε. Cuando ε se aproxima a cero, tanto visualmente, como numéricamente, se observa que δ, se aproxima a cero. Más aún, x_1 , x_2 se aproximan a x_0 que en este caso tiene el valor 6 y simultáneamente y_1, y_2 se aproximan a y_0 que también tiene el valor 6. Por lo tanto, en la Figura 4 se puede corroborar visual y numéricamente que el límite requerido es 6, con lo que se concluye la Tarea A.

En la Tarea B, con base en la Figura 4, los participantes conjeturan verbalmente y por escrito que el límite es igual a 6 y que el valor de δ es igual al valor de ε, esto es $\delta = \varepsilon$. La Tarea C se orienta a que el maestro muestra, subrayar y propone el uso de la representación algebraica-analítica de la definición formal de límite de una función.

A continuación se ilustra un procedimiento que se plantea a los participantes (por lo general, estudiantes de matemáticas) para mostrar que el $\lim_{x \to 6} x = 6$.

Dado ε > 0 tomemos δ = ε. Si $0 < |x - 6| < \delta$ entonces $|f(x) - 6| = |x - 6| < \delta = \varepsilon$.Para concluir la Tarea C, se pide que comuniquen con detalle el procedimiento anterior.

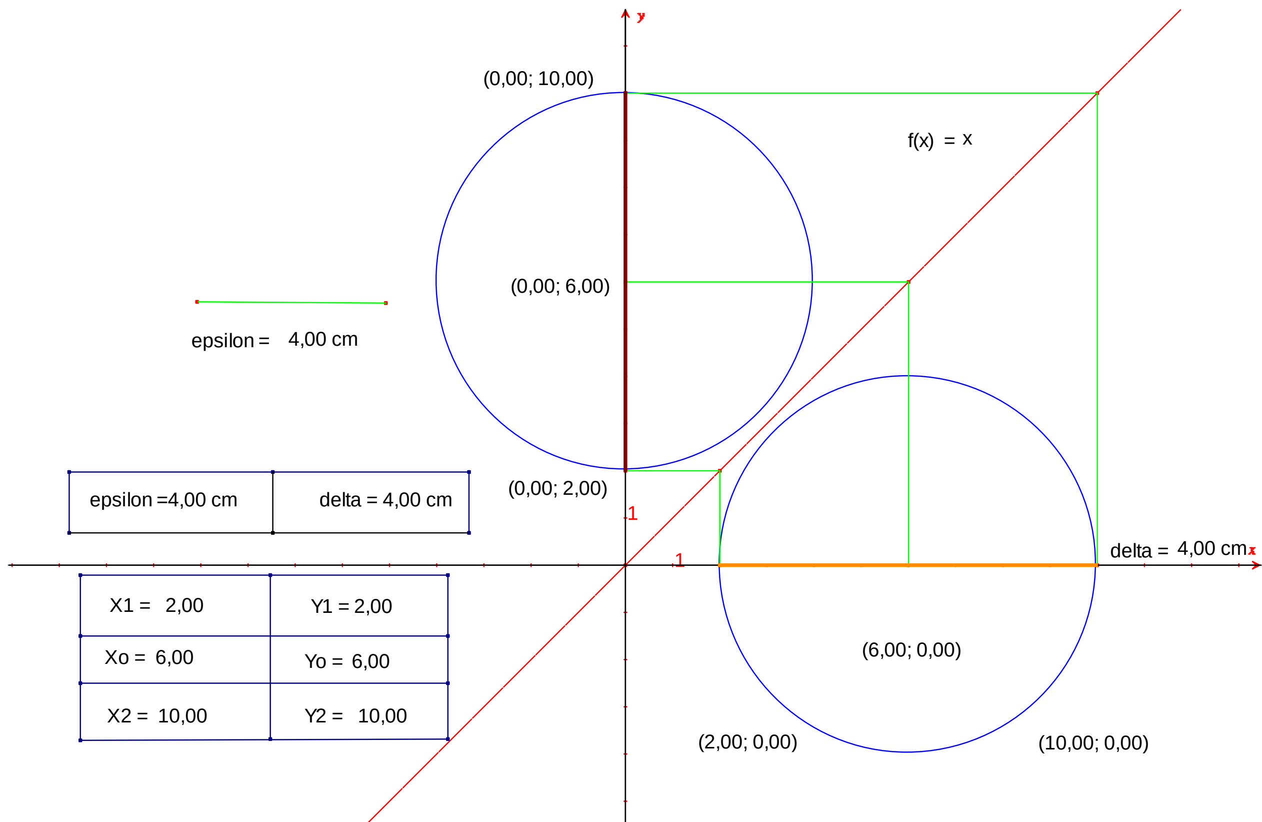


Figura 4: Primera Actividad

Las Actividad 2, 3 y 4 contempla las Tareas A, B y C con un procedimiento similar a la Actividad 1. En la Actividad 2 se trabaja con el $\lim_{x \to 3} 2x - 1$, en la Tarea A, mediante la representación gráfica-numérica, los participantes conjeturan que el límite es 5, junto a la relación entre δ y ε, la cual es $\delta = \varepsilon/2$, con esto se cumple la Tarea B y nuevamente para cumplir con la Tarea C, el maestro muestra que el $\lim_{x \to 5} 2x - 1 = 5$.

A su vez, en la Actividad 3 (ver Figura 5) se obtiene que el $\lim_{x \to -3} \frac{x}{2} + 6 = \frac{9}{2}$ y en este caso, los participantes conjeturan con ayuda del software que $\delta = 2\varepsilon$. Para cumplir con la Tarea C, el maestro pide a los participantes mostrar algebraicamente que $\lim_{x \to -3} \frac{x}{2} + 6 = \frac{9}{2}$ y proporciona retroalimentación simbólica sobre la Tarea C. Nuevamente para la Actividad 4 (ver Figura 6) se conjetura que $\delta = \varepsilon/4$ cuando el $\lim_{x \to 6} -4x + 18 = -6$. Nuevamente para realizar la Tarea C, el maestro pide que los participantes muestren $\lim_{x \to 6} -4x + 18 = -6$ y proporciona retroalimentación.

Finalmente, en la Actividad 5 se excluye la Tarea A y las Tareas B y C, plantean a los participantes que encuentren (sin SGD y sin ayuda del maestro), el $\lim_{x \to x_0} ax + b$, relacionando δ con ε, lo que requiere pasar al pensamiento abstracto, además corroborar que efectivamente el límite toma ese valor, usando la definición formal. Tomando como base las Actividades 1, 2, 3 y 4, los participantes pueden conjeturar que $\delta = \frac{\varepsilon}{|a|}$ junto con que el valor del límite es $ax_0 + b$, una manera de mostrar que la conjetura es válida es la siguiente:

Dado $\varepsilon > 0$ tomemos $\delta = \frac{\varepsilon}{|a|}$, si $0 < | x - x_0 | < \delta$ entonces

$$|f(x) - (ax_0 + b)| = | ax + b - ax_0 - b | = | ax - ax_0 | = | a(x - x_0) |$$

$$= |a||x - x_0| < |a|\delta = |a| \frac{\varepsilon}{|a|} = \varepsilon. \text{ Por lo tanto}$$

$$\lim_{x \to x_0} ax + b = ax_0 + b.$$

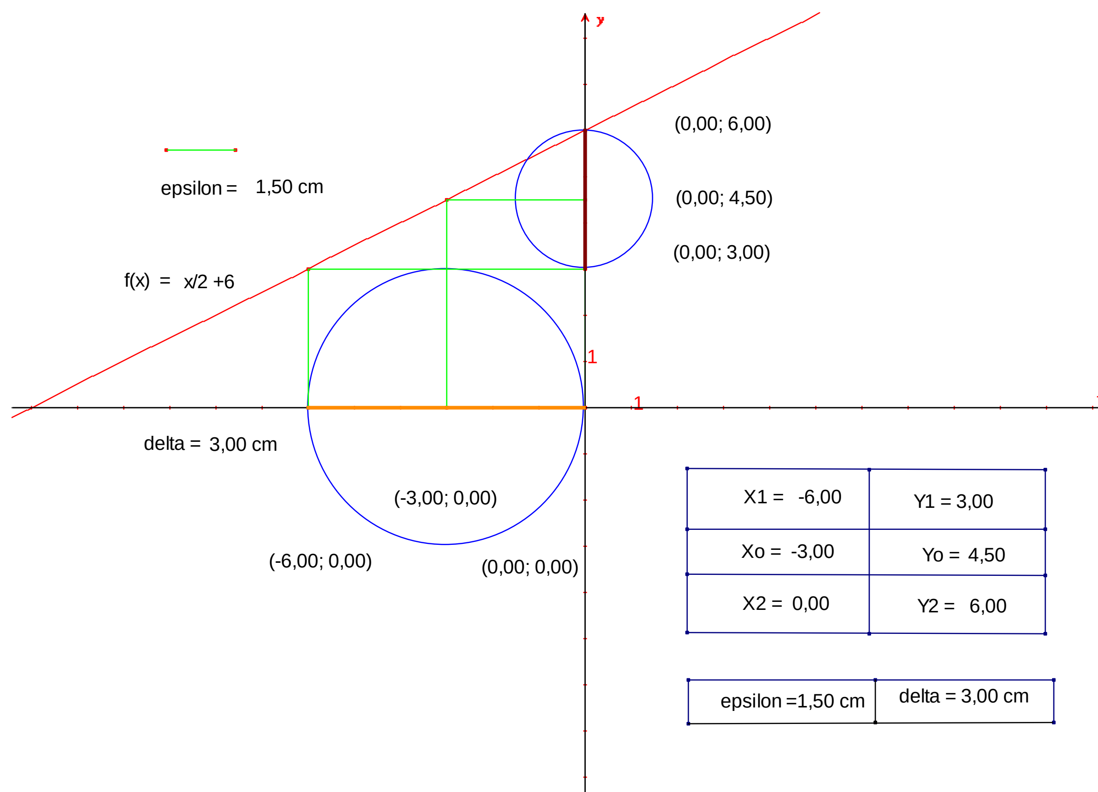


Figura 5: Tercera Actividad

Finalmente, mediante la experiencia descrita anteriormente, se muestran evidencias del cambio en las ideas sobre la definición e imagen del concepto, en la Figura 6 se muestra que el marco teórico proporciona pautas para observar el cambio cognitivo inicial y final de los participantes, tomando como ejemplo el estudiante 8, se observa que en la actividad 1 interpreta en la definición el valor absoluto únicamente como una distancia y posteriormente en la actividad 9 interpreta la definición de acuerdo a la visualización con uso del SGD considerando todos los valores posibles en los intervalos de longitud 2ε y 2δ que cumplen de forma simultánea con una relación entre ε y δ.

6. Conclusiones

Al trabajar con las actividades, algunos de los involucrados lograron conjeturar la relación entre ε y δ, para el caso de funciones lineales. Cabe aclarar, que los estudiantes de primer semestre de la Licenciatura en Matemáticas, no logran determinar que $\delta = \frac{\varepsilon}{|a|}$, en lugar de esta expresión ellos conjeturan que: $\delta = \frac{\varepsilon}{a}$, es decir, ellos no comprenden que "a" puede ser negativo y entonces el δ no satisface la propiedad de ser positivo. Lo anterior posiblemente se debe a que estos estudiantes, no tienen los conocimientos suficientes de números reales y en particular del concepto de valor absoluto. El caso de las funciones no lineales, es una extensión natural de esta investigación, con respecto a las funciones cuadráticas, hemos realizado algunas pruebas para indagar las dificultades de la representación gráfica-numérica y han sido similares al caso lineal. Sin embargo, la representación algebraica-analítica es la que presenta mayor dificultad.

En este trabajo se analizaron descriptivamente actividades desde un punto de vista cognitivo-semiótico, donde se considera que las representaciones externas simbólicas apoyan a mejorar la definición e imagen del concepto en los estudiantes. Para las representaciones semióticas, se consideraron los sistemas gráfico-numérico y verbal-simbólico.

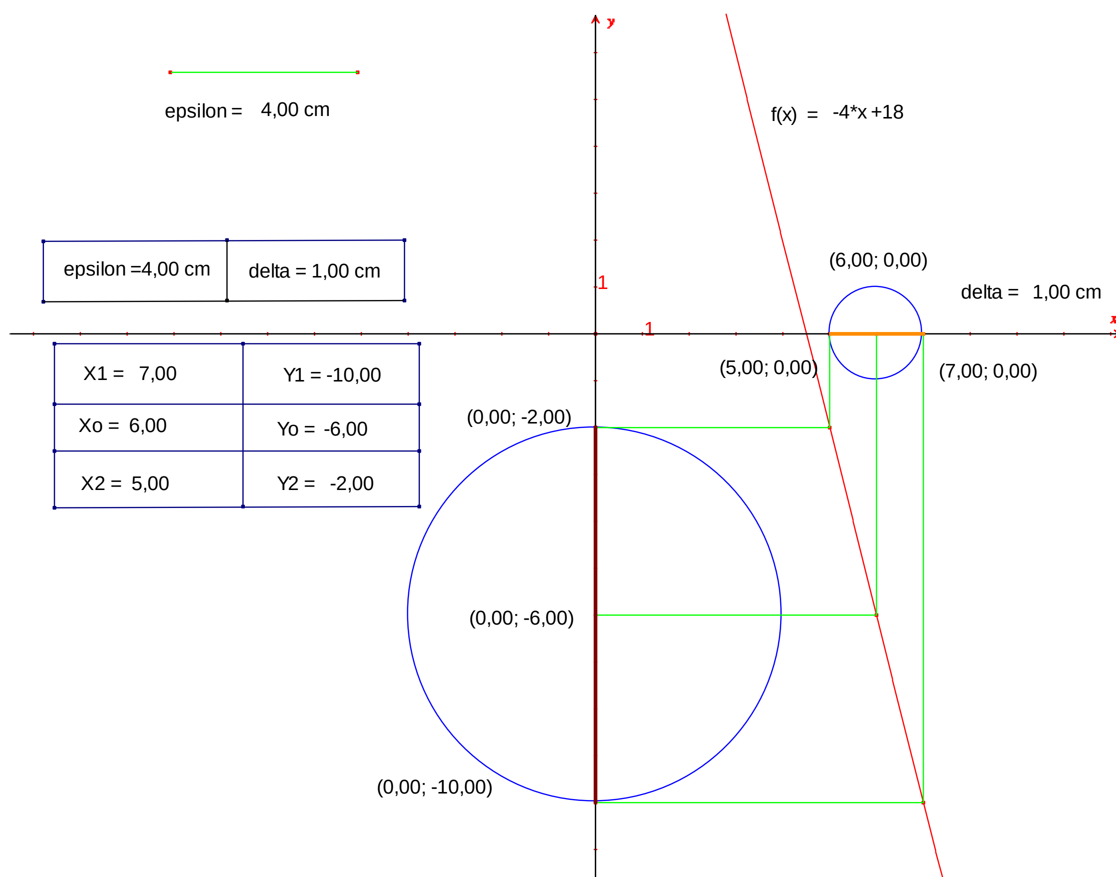
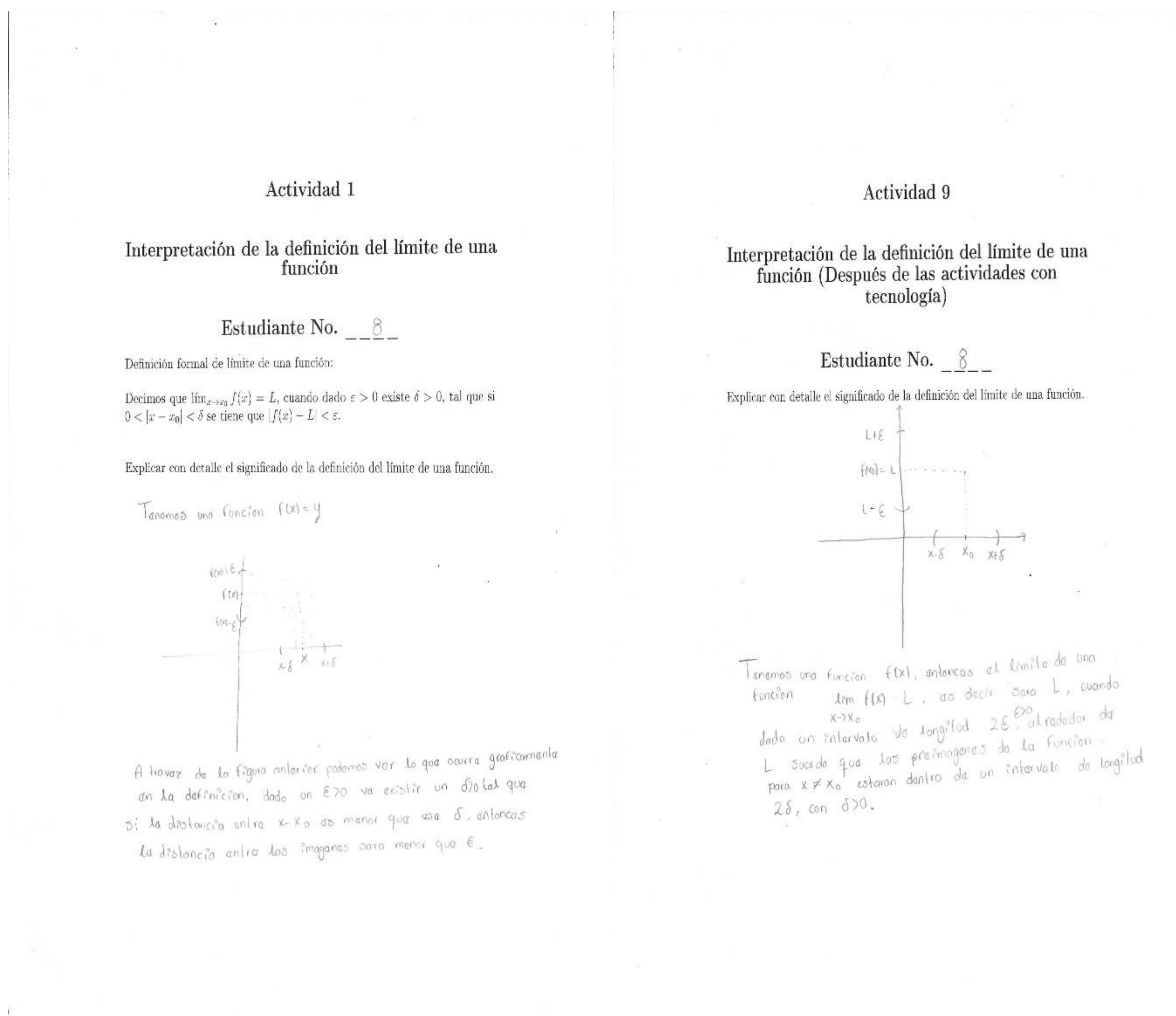


Figura 6: Cuarta Actividad

En el trabajo con los estudiantes se observó que la interpretación de la definición e imagen conceptual, se enriqueció favorablemente con las actividades realizadas. Las distintas representaciones inducidas por las actividades, fueron comprendidas de manera natural por los alumnos, con comentarios positivos a esta secuencia didáctica.

Las actividades propuestas en esta investigación son el inicio de la construcción de un instrumento que puede ayudar a mejorar la representación interna de la definición del límite de una función. Entre las varias aportaciones que las actividades ofrecen es que permiten una representación gráfica de los conjuntos de números reales, $0 < |x - x_0| < \delta$ y $|f(x) - L| < \varepsilon$;

Por último, este trabajo tiene extensiones naturales, por ejemplo, una vez que se ha establecido la relación de ε y δ, se puede inducir a los estudiantes a que reconozcan que existen una infinidad de δ, que satisfacen la definición. También las actividades tienen inmersos otros conceptos, como son continuidad y continuidad uniforme de funciones.


Actividad 1

Interpretación de la definición del límite de una función

Estudiante No. 8

Definición formal de límite de una función:

Decimos que $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$, cuando dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$, tal que si $0 < |x - x_0| < \delta$ se tiene que $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Explicar con detalle el significado de la definición del límite de una función.

Tenemos una funcion f(x) = y

A travez de la figura anterior podemos ver lo que ocurre graficamente en la definicion, dado un ε>0 va existir un δ>0 tal que si la distancia entre x-x₀ es menor que ese δ, entonces la distancia entre las imagenes sera menor que ε.

Actividad 9

Interpretación de la definición del límite de una función (Después de las actividades con tecnología)

Estudiante No. 8

Explicar con detalle el significado de la definición del límite de una función.

Tenemos una funcion f(x), entonces el limite de una funcion $\lim_{x\to x_0} f(x)$ L, es decir sera L, cuando dado un intervalo de longitud 2ε, ε>0, alrededor de L sucede que las preimagenes de la funcion para x ≠ x₀ estaran dentro de un intervalo de longitud 2δ, con δ>0.

Figura 6: Cambio de interpretación de la definición e imagen conceptual

Referencias Bibliograficas

Bisquerra, R. (1989). *Métodos de investigación educativa. Guía práctica*. Barcelona: Ediciones CEAC.

Blázquez, S. & Ortega, T. (2001). Los sistemas de representación en la enseñanza de límite. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 4(3), 219-236.

Blázquez, S., Ortega, T., Gatica, S. & Benegas, J. (2006). Una conceptualización de límite para el aprendizaje inicial de análisis matemático en la universidad. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 9(2), 189-209.

Contreras, A., Luque, L. & Ordóñez, L. (2004). Una perspectiva didáctica en torno a los contextos y a los sistemas de representación semiótica del concepto de máximo. *Educación Matemática*, *16*(1), 59-87.

Boyer, C. (1996). *Historia de la matemática.* España: Alianza Editorial.

Durán, A. J. (1996). *Historia, con personajes, de los conceptos del cálculo.* España: Alianza Editorial.

Duval, R. (1999). *Semiosis y Pensamiento humano. Registros Semióticos y aprendizajes intelectuales.* Colombia: Universidad del Valle.

Espinoza, L. & Azcárate, C. (2000). Organizaciones Matemáticas y Didácticas en torno al objeto de Límite: una propuesta metodológica para el análisis. *Enseñanza de las ciencias*, *18*(3), 355-368.

Frawley, W. (1999). *Vygotsky y la ciencia cognitiva.* Barcelona: Paidós.

Gutiérrez, A. & Boero, P., Eds. (2006) *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education. Past, Present and Future.* PME 1976-2006. Rotterdam: Sense Publishers.

Sierra, M., Gonzáles, M. & López, C. (1999). Evolución histórica del concepto de límite funcional en los libros de texto de Bachillerato y curso de Orientación Universitaria (COU): 1940-1995. *Enseñanza de las ciencias*, *17*(3), 463-476.

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(2), 151-169.

Zimmerman, W & Cunningham, S. (1991) Visualization in Teaching and Learning Mathematics,Washington, DC: Mathematical Association of America.

Diseño de una aplicación móvil colaborativa para reforzar el aprendizaje de binomios con término común para alumnos de educación secundaria

Tomás Jiménez-Luna, René G. Cruz-Flores, Magally Martínez-Reyes

Universidad Autónoma de Estado de México, Centro Universitario UAEM Valle de Chalco
tomasjluna@gmail.com, rgcruzf@uaemex.mx, mmartinezr@uaemex.mx



Fecha de Recepción:03 de febrero 2020
Fecha de Aceptación: 08 de mayo 2020
El Cálculo y su Enseñanza, Enseñanza de las Ciencias y la Matemática.
Volumen 14. Enero - Junio 2020.
Cinvestav-IPN © Ciudad de México. ISSN 2007-4107 P.p. 30-46

Resumen: Uno de los problemas de la enseñanza de binomios con término común en México, es la falta de aplicación de métodos didácticos que permitan a los alumnos relacionar los temas con la realidad, quedándose muchas veces en lo abstracto. A partir de la postura de la educación matemática realista, en este trabajo se propone la creación de una aplicación móvil (app) que permite a los estudiantes relacionar de una manera visual y espacial, el valor de una incógnita con una longitud concreta, lo cual potencializa la extrapolación de operaciones aritméticas elementales a operaciones algebraicas básicas, como la multiplicación de binomios con término común. Conforme a la ingeniería de software educativo, se selecciona una metodología de desarrollo ágil, considerando para el alcance de este trabajo las tres primeras etapas (análisis, diseño y desarrollo). Se detallan las características de los módulos de la app y el diseño de la actividad educativa denominada "Producto de binomios". Como parte del diseño de la app se considera la importancia del aprendizaje activo y colaborativo mediante la instrumentación del modelo didáctico CUVIMA y un modelo de comunicación computacional.

Palabras clave: Aplicación móvil, binomios con término común, aprendizaje colaborativo, bloques aritméticos multibase.

Tomás Jiménez-Luna, René G. Cruz-Flores, Magally Martínez-Reyes

Abstract: One of the problems of the teaching of binomials with common terms in Mexico, is the lack of application of didactic methods that allow students to relate the subjects to reality, often remaining in the abstract. From the theory of realistic mathematical education, this work proposes the creation of a mobile application (app) that allows students to relate in a visual and spatial way, the value of an unknown with a specific length, which enhances the extrapolation of elementary arithmetic operations to basic algebraic operations, such as the multiplication of binomials with a common term. Then according to the educational software engineering, an agile software development methodology is selected, considering for the scope of this work the first three stages (analysis, design and development). Then the characteristics of the modules of the app and the design of the educational activity called "Product of binomials" are detailed. As part of the design of the app, the importance of active and collaborative learning is considered through the instrumentation of the CUVIMA educational model and a computational communication model.

Key words: Mobile application, common term binomials, collaborative learning, multibase arithmetic blocks.

1. Introducción

En México han sido identificadas deficiencias en el aprendizaje de matemáticas desde las primeras etapas educativas, desde preescolar hasta secundaria, INEE (2017). En este sentido Backhoff, Andrade, Peón, Sánchez y Bouzas (2006) reportan que el 17% de los estudiantes de sexto de primaria no logra adquirir habilidades como leer, ordenar y comparar números naturales y resolver problemas sencillos que implican estos números. Además, algunas investigaciones han señalado dificultades de los niños en el tránsito desde la aritmética hasta el álgebra en la escuela secundaria (Lacasta, Madoz y Wilhelmi, 2006; Kieran, 2007; Filloy, Puig y Rojano, 2008). También, Godino, Aké, Gonzato, y Wilhelmi (2012), opinan que el álgebra aparece de manera abrupta en secundaria, sin continuidad con los temas de aritmética, medida y geometría tratados en primaria, por lo que en su trabajo proponen niveles primarios de algebrización, con el objetivo de facilitar el diseño de actividades instruccionales que favorezcan el surgimiento y consolidación progresivos del razonamiento algebraico.

Como muestra de las deficiencias encontradas en el nivel secundaria, en la prueba PISA 2015 México se ubicó en lugar 58 de 70 en el área de matemáticas, con una calificación promedio de 408 puntos, en una escala de 0 a 1,000 (OCDE, 2016); muy por debajo de las naciones que encabezan en el ranking, como Singapur (564 puntos), Hong Kong (548) y Japón (532). Para efectuar la evaluación en el área de matemáticas se han establecido seis niveles de competencia tanto en la escala combinada, como en las sub-escalas que se refieren a los componentes tales como cantidad, espacio y forma entre otros. Actualmente México se ubica en el nivel uno, y para alcanzar el nivel dos, es necesario que los estudiantes puedan emplear algoritmos, fórmulas, convenciones o procedimientos básicos, así como ser capaces de hacer interpretaciones literales de los resultados.

Entre los procedimientos algebraicos básicos, que se incluyen en el plan de estudios de los alumnos de secundaria, se encuentran los productos notables, por lo que resulta importante buscar alternativas didácticas, que permitan mejorar la comprensión de este y otros conceptos algebraicos básicos impartidos, para plantear soluciones relacionadas a la vida cotidiana. Respecto a este tema, Martos (2013) analiza la importancia del aprendizaje de los productos notables en alumnos de nivel básico para completar tareas como: simplificación de expresiones algebraicas, factorización, y la resolución de ecuaciones de segundo grado, entre otras.

El presente trabajo centra la atención particularmente la resolución de binomios con término común, como una herramienta matemática para todo estudiante que se encuentra en educación básica. En la medida en que los conceptos matemáticos son entendidos, es más fácil para el estudiante ponerlas en práctica en la realidad.

Esta preocupación es abordada por la teoría de educación matemática realista, que de acuerdo con Freudenthal (1991), se fundamenta en seis principios, y de los cuales en este trabajo se enfatiza principalmente en los principios de realidad, niveles y de interacción (como se describe en la tabla 1), a partir de las cuales se han establecido algunas características para la app descrita en el presente trabajo.

Principio	¿Qué es?	¿Cómo puede trabajarse?	¿Cómo se implementa en la app?
De la realidad	Las matemáticas se aprenden haciendo matemáticas en contextos reales. Un contexto real se refiere tanto a situaciones problemáticas de la vida cotidiana y situaciones problemáticas que son reales en la mente de los alumnos.	El contexto de los problemas que se presentan a los alumnos puede ser el mundo real, pero esto no es necesariamente siempre así. Es necesario que progresivamente se desprendan de la vida cotidiana para adquirir un carácter más general, o sea, para transformarse en modelos matemáticos.	A través de la manipulación de bloques dentro del contexto de los ejercicios propuestos por la aplicación móvil, en sustitución de bloques físicos.
De niveles	Los estudiantes pasan por diferentes niveles de comprensión: - Situacional: en el contexto de la situación. - Referencial: esquematización a través de modelos, descripciones, etc. - General: exploración, reflexión y generalización. - Formal: Procedimientos estándares y notación convencional.	Esquematización progresiva (profesor) y reinvención guiada (aprendiz): las situaciones de la vida cotidiana son matematizadas para formar relaciones más formales y estructuras abstractas.	A través de dos niveles de complejidad dentro del contexto de la aplicación, que le permiten al estudiante iniciar con ejercicios sencillos y con validaciones que lo guían y le impiden hacer acomodos incorrectos, para posteriormente presentarle ejercicios que requieren mayor número de movimientos y donde la aplicación ya no ofrece algún tipo de ayuda que le facilite la resolución del ejercicio.
De interacción	La enseñanza de las matemáticas es considerada una actividad social. La interacción entre los estudiantes y entre los estudiantes y los profesores puede provocar que cada uno reflexione a partir de lo que aportan los demás y así poder alcanzar niveles más altos de comprensión.	La negociación explícita, la intervención, la discusión, la cooperación y la evaluación son elementos esenciales en un proceso de aprendizaje constructivo en el que los métodos informales del aprendiz son usados como una plataforma para alcanzar los formales. En esta instrucción interactiva, los estudiantes son estimulados a explicar, justificar, convenir y discrepar, cuestionar alternativas y reflexionar.	A través de la formación de equipos de trabajo de tres integrantes cada uno, quienes participan de la actividad educativa desde su propio dispositivo, desempeñando un rol de juego en una sesión síncrona de trabajo. De esta manera, los integrantes suman esfuerzos individuales y puedes intercambiar ideas y puntos de vista, a fin de concretar la actividad más fácilmente.

Tabla 1: Principios de teoría de educación matemática realista implementados en la app. Elaboración propia.

En relación con la interacción conocimiento-realidad, Castillo (2008) afirma que el saber lo elabora el aprendiz mediante acciones que hace sobre la realidad; por su parte Coll (1997) menciona que la realidad existe en tanto existe una construcción mental interna interpretativa del aprendiz; es decir, aquello que el alumno recibe del profesor sin que internamente exista un proceso de asimilación respecto a la realidad no representa aprendizaje en el sentido estricto de la palabra. Por su parte Cuevas y Pluvinage (2003) enfatizan la importancia de la acción que el estudiante debe realizar sobre el objeto matemático que representa un concepto matemático, para ser participe en la construcción de su conocimiento.

Los métodos de enseñanza y aprendizaje han sufrido importantes transformaciones, por ejemplo a través de la creación de ambientes de aprendizaje o aplicaciones móviles donde la matemática se perciba como una ciencia experimental, pero además, donde puedan promoverse diversas representaciones de los conceptos matemáticos (Zaldivar, Londoño y Medina, 2017; Cuevas, Villamizar, y Martínez, 2017).

En el sentido didáctico, para el caso particular de la enseñanza de la resolución de binomios con término común, existen algunas opciones diferentes al procedimiento algorítmico tradicional, por ejemplo, el modelo de área propuesto por Zoltán Dienes y Jerome Bruner (Covas y Bressan, 2011), cuyas principales características y diferencias mutuas, se muestran en la tabla 2. El modelo de área incluye materiales y juegos variados, cuyo objetivo es enseñar estructuras matemáticas a niños de educación básica de entre 5 y 13 años, apoyados con el uso de materiales concretos especialmente diseñados, entre los que se encuentran los bloques aritméticos multibase (BAM o bloques Dienes) constituidos por cubos de lado 1, regletas de la forma 1 por *x* (*x* toma un valor conocido) y placas cuadradas y cubos de lado *x* (ver tabla 2).

Algoritmo tradicional	Uso de bloques aritméticos multibase
El producto de dos binomios con un término común es un trinomio formado de la siguiente manera: • El primer término es el cuadrado del término común • Su segundo término es el producto de la suma de los términos no comunes por el término común. • El tercer término es el producto de los términos no comunes. La identidad se resume de esta manera: **$(ax+b)(ax+c)=(ax)^2 + ax(b+c) + bc$**	x^2+6x+9 $(x+3)(x+3)$

Tabla 2: Algoritmo tradicional de producto de binomios y su representación con BAM.

Inicialmente el modelo de área fue utilizado para explorar ideas lógicas, propiedades de los sistemas de numeración posicionales; sin embargo, Covas et al. (2011) presentan un uso para la enseñanza del algebra, interpretándose *x* como una variable, permitiendo así una representación

de expresiones cuadráticas, y la representación del proceso de factorización de estas y viceversa, tal como se aprecia en la figura 1.

Figura 1: Representación del principio de factorización de una ecuación de segundo grado. Elaboración propia.

De manera similar al desarrollo de diversos métodos de enseñanza de las matemáticas, en busca de alternativas didácticas que le faciliten al alumno la comprensión de conceptos abstractos, es importante señalar el impacto que ha tenido el desarrollo de nuevas tecnologías utilizadas cada vez con mayor frecuencia en las aulas de clase. La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas se enfrentan cada vez más al surgimiento de tecnologías móviles, las cuales se integran con mayor frecuencia el aula (Villarreal, 2012).

Las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) son todos aquellos recursos, herramientas y programas que se utilizan para procesar, administrar y compartir la información mediante diversos soportes tecnológicos, tales como: computadoras, teléfonos móviles, televisores, reproductores portátiles de audio y video o consolas de juego (UNAM, 2013). Como afirma Sánchez (2004) mediante un uso adecuado de las TIC es posible analizar un tópico desde diversos puntos de vista, logrando conectar e integrar el conocimiento de una disciplina con el saber de otras disciplinas.

Castillo (2008) hace referencia a la importancia del uso de las TIC, debido a que enriquecen el proceso de enseñanza-aprendizaje e inciden en la cognición y procesos del pensamiento de los estudiantes, ya que pueden apoyar en sus indagaciones en varias áreas de las matemáticas como números, medida, geometría, estadística y álgebra. El uso de los dispositivos móviles para mejorar la experiencia de aprendizaje de los alumnos ha sido presentado en diversos casos de estudio, con la intención de conocer los beneficios de su uso. El gran desafío para maestros e investigadores es explorar cómo las tecnologías móviles pueden usarse para apoyar el proceso de aprendizaje, aprovechando algunas de sus características tales como portabilidad, conectividad e interacción social. Drigas y Pappas (2015) indican que en años recientes se han desarrollado aplicaciones móviles para apoyar la enseñanza en algebra, geometría, análisis matemático y estadística, entre otras áreas de las matemáticas, las cuales permiten practicar habilidades numéricas, y realizar tareas de medición. La mayoría de estas aplicaciones presentan tutoriales,

ejercicios, ejemplos e incluso algunos juegos que permiten fortalecer los conocimientos matemáticos adquiridos en clase.

Entre los trabajos relacionados a gráficas y funciones, se encuentran casos como el de Baya'a y Daher (2009), quienes realizaron un experimento en una escuela secundaria árabe en Umelfahn, Israel, en el que participaron 32 estudiantes de octavo grado con sus propios móviles, realizando actividades al aire libre para estudiar conceptos matemáticos a través la exploración y la investigación utilizaron midlets algebraicos desde el sitio del Institute for Alternatives in Education, en el que consultaron los gráficos de varias plantillas de funciones lineales. Dicho estudio concluyó que un entorno de aprendizaje matemático utilizando teléfonos móviles permite el aprendizaje independiente y colaborativo en situaciones auténticas de la vida real, ya que involucra a los estudiantes en diversas acciones matemáticas y hace que el aprendizaje de las matemáticas sea más fácil y rápido.

Respecto al área de la aritmética, Diah, Ehsan e Ismail (2010) desarrollaron un juego educativo móvil para educación primaria llamado MathRush, el cual fue diseñado para apoyar el aprendizaje de las matemáticas fuera del aula. Su marco está constituido de cuatro partes: teorías de aprendizaje, enfoque de aprendizaje móvil, enfoque de desarrollo de juegos y medio de aprendizaje y educación. Además incluye entre sus criterios objetivos, reglas, competencia, desafío, fantasía y entretenimiento.

En el área del algebra, Roberts y Vänskä (2011) realizan el proyecto Nokia Mobile Learning for Mathematics, a través del cual participan 3000 alumnos de décimo grado en Sudáfrica, haciendo uso de la tecnología móvil para apoyar el aprendizaje de las matemáticas en 30 escuelas secundarias públicas. Los estudiantes y profesores tuvieron acceso a materiales interactivos de aprendizaje de matemáticas a través de una plataforma móvil con soporte para redes sociales, trabajando con contenido teórico y también con una sección de preguntas provenientes de una base de datos de 10000 preguntas de varios tipos, como son opción múltiple, falso o verdadero, detectar el error y preguntas abiertas, categorizadas por tema y dificultad. Los resultados por un lado sugieren beneficios del uso de la red para las tareas de matemáticas de los adolescentes, y por el otro la necesidad de acceso de los estudiantes a los dispositivos móviles en todo el país. También Kalloo y Mohan (2012) presentaron una aplicación de aprendizaje móvil llamada “MobileMath”, diseñada para mejorar el rendimiento en algebra de estudiantes de secundaria. La aplicación, que requiere acceso a internet, ofrece lecciones, ejemplos, tutoriales, pruebas y juegos que ayudan a los usuarios a practicar ciertas habilidades matemáticas. Los resultados se evaluaron a través de cuestionarios, exámenes previos, pruebas posteriores y entrevistas, mostrando que la mayoría de los estudiantes disfrutaron las actividades de aprendizaje, especialmente los juegos, y pensaron que la aplicación les ayudó a mejorar su rendimiento en álgebra.

Los trabajos descritos anteriormente, entre muchos otros, han coincidido en la conveniencia de abordar temas del área de matemáticas a través del uso de dispositivos móviles, mediante los cuales los alumnos interactúan con diferentes tipos de contenidos, para posteriormente resolver una serie de actividades, principalmente en grupos de trabajo colaborativo, que les permiten ejercitar los temas repasados de manera conjunta, partiendo principalmente de problemáticas o aspectos de la vida real. Sin embargo, son diversos los enfoques que guían la manera en que es incorporado el uso de la tecnología dentro del aula de clases, mezclando de manera diferente los aspectos matemáticos, didácticos y tecnológicos dentro de un ambiente de aprendizaje propicio.

De entre algunos enfoques existentes para la incorporación del uso de la tecnología en el aula de clases, en el presente trabajo se ha optado por el enfoque del modelo CUVIMA, presentado por Cuevas et. al. (2017). Dicho trabajo enfatiza la importancia del uso de los modelos para describir matemáticamente fenómenos de la realidad, partiendo de las ideas previas de los propios estudiantes, las cuales pueden ser restructuradas a partir de un proceso de cambio conceptual, y cuyo resultado modifica la interpretación del individuo. Con ello se motiva que el estudiante adquiera habilidades, valores y actitudes científicas como la curiosidad, la apertura a nuevas ideas y el escepticismo formal.

El modelo CUVIMA, a partir de la modelización propuesta por Touma (2009) que propone el modelado de fenómenos del mundo real utilizando procesos de interpretación inductiva y deductiva en combinación con registros de representación semiótica, se compone de cuatro marcos, que son (Cuevas, 2017): el marco de realidad de la física, marco de modelización del dispositivo móvil, marco de análisis conceptual de la física y marco de análisis conceptual matemático.

Para los fines del presente trabajo, se adopta parcialmente el modelo CUVIMA haciendo uso de tres de sus marcos que son: el marco de realidad física, el de modelización del dispositivo móvil y el de análisis conceptual matemático. Debido a que este trabajo solo aborda hasta la fase de diseño, se ejemplificará la propuesta en cada marco. La estructura mencionada se puede observar en la figura 2.

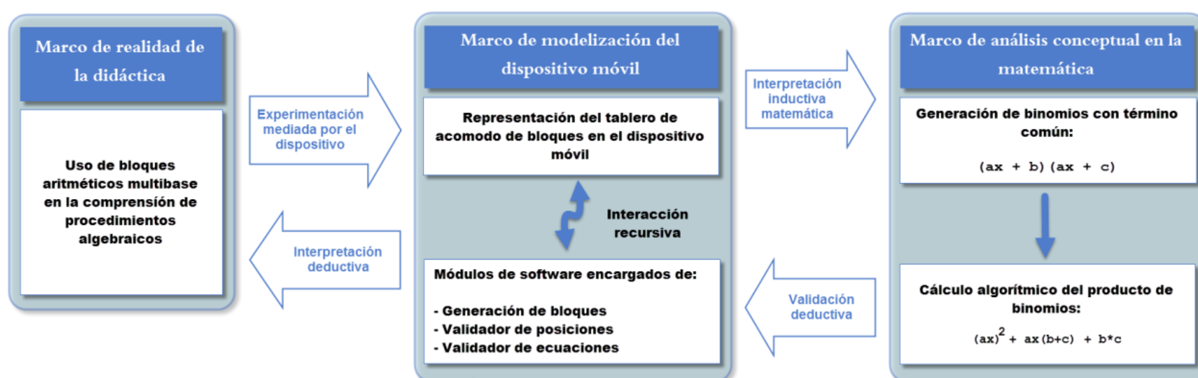


Figura 2 Modelo metodológico propuesto adaptado de Cuevas (2017).

El diseño de la app que se propone en el presente artículo conjuga aspectos matemáticos, tecnológicos y didácticos con el fin de ofrecer una herramienta sencilla en cuanto a la interacción con ella, pero suficientemente robusta para dar paso a la colaboración en equipos de estudiantes guiados por el profesor y permitir conocer el concepto de multiplicación de binomios con termino común bajo una perspectiva poco aplicada en el aula de clases tradicional. Este tipo de app fue desarrollado en Cruz (2010) en lenguaje java, con la finalidad es apoyar a estudiantes de educación secundaria a reforzar el uso de binomios con término común mediante representaciones gráficas; sin embargo la caducidad de la tecnología la ha dejado en desuso.

De ahí la necesidad de proponer una app para dispositivos actuales que utilizan sistema operativo Android y al alcance de los estudiantes hoy en día, y que difícilmente podrán presentar esa caducidad.

2. Metodología de desarrollo de la aplicación

Este trabajo se encuentra aún en proceso, por tal motivo se presentan los avances correspondientes al análisis de requerimientos, el diseño y el desarrollo de la aplicación móvil, que corresponde a las tres primeras fases de la ingeniería de desarrollo de software educativo siguiendo las etapas básicas de las metodologías de desarrollo ágil, como se aprecia en la figura 3.

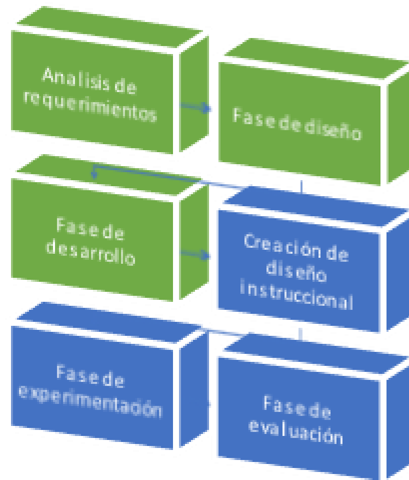


Figura 3: Etapas de metodología propuesta. Elaboración propia.

El diseño de la aplicación contempla que un grupo de estudiantes organizados en equipos de trabajo de tres integrantes cada uno, habiendo instalado la aplicación en sus móviles, resuelvan una serie de ejercicios simultáneamente, realizando por turnos algunas tareas específicas gestionadas por la app, en un ambiente de competencia donde resulta ganador el primer equipo que logra completar correctamente un conjunto de ejercicios; fomentando así un aprendizaje colaborativo como una manera de transmitir conocimientos matemáticos. Esta característica de la app debe contemplarse en las fases de desarrollo de la app, que se mencionan enseguida:

2.1. **Análisis de requerimientos:** Es una etapa exploratoria y de investigación documental a través de la cual se profundiza en la importancia de los productos notables en el plan de estudios de los alumnos de secundaria (Martos, 2013). Después se explora el uso de las TIC's y particularmente de las aplicaciones móviles para la enseñanza de las matemáticas (Cuevas et. al. 2017; Villareal, 2012), los productos notables y los binomios con termino común en particular, para tener conocimiento de los trabajos reportados en la literatura acerca de ello y donde se hacen notar las ventajas del uso de los dispositivos móviles en alumnos de esta edad. Luego se determinan de los requisitos funcionales de la aplicación móvil a desarrollar, incluyendo la arquitectura y la funcionalidad de sus principales módulos (ver figura 3).

Se requiere de una actividad educativa donde se usará la aplicación móvil, a la cual denominaremos "Producto de binomios". Se busca que en equipos de tres estudiantes, de tercer grado de secundaria, asuman uno de los siguientes tres roles: elector, colocador y escritor. A continuación se describe las reglas necesarias:

- El Elector de pieza desplegará un bloque de tal manera que permita completar el área de un rectángulo imaginario cuyas dimensiones están dadas.
- El Rotador-Colocador elegirá el lugar donde dicha pieza deberá ser colocada, para ser seleccionada dicha pieza, esta deberá ser igual lado a lado de aquellas que ya están mostradas, dándole un giro de 90 grados si es necesario.
- El rol de Escritor solo se activará una vez que la representación geométrica de la expresión algebraica sea correcta.
- Al terminar un problema completo, los estudiantes tendrán que rotar sus celulares en el sentido de las manecillas del reloj.

A partir de estas reglas se determina la manera y el orden en que se lleva a cabo la interacción entre los participantes, identificando los siguientes procesos a considerar dentro de la aplicación:

- Inicio de sesión: El estudiante inicia la aplicación, ingresando algunos datos básicos para su identificación. La aplicación permite al usuario conectarse a través de wifi o bluetooth.
- Formación de equipos: La aplicación ayuda a asignar aleatoriamente a los diferentes participantes en equipos de trabajo de tres alumnos, si así se desea, existiendo además la posibilidad de formar equipos de trabajo libremente, de acuerdo al criterio del profesor.
- Inicio de actividad: La aplicación asigna en conjunto con los alumnos los roles a desempeñar por cada uno, los cuales tras concluir cada partida se rotaran entre los miembros con la finalidad de que cada alumno desempeñe una función diferente a la vez, hasta que todos los participantes hayan desempeñado cada uno de los tres roles descritos anteriormente.
- Desarrollo y conclusión de actividad: Los participantes realizan las diferentes actividades descritas en la app, interactuando por turnos con la aplicación. Es decir, cuando un participante ejecuta su rol, ninguna tarea es realizada por otro alumno, hasta que el primero concluye su labor y es evaluada por la aplicación como correcta. Cuando el equipo finaliza su tercera actividad, y todos han desempeñado los tres roles, se da por concluida.

2.2. **Fase de diseño:** Para el desarrollo de cualquier aplicación móvil, se requieren definir acciones concretas que serán asignadas a módulos que permitan una interacción con la aplicación, una forma de definir las interacciones es propuesta por Cruz (2010), a partir de la cual la aplicación móvil se construye mediante un modelo arquitectónico basado en tres módulos principales que describen en la figura 4:

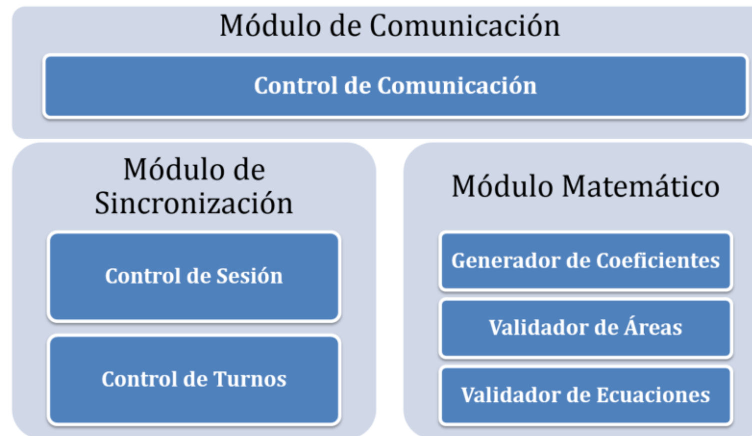


Figura 4. Módulos de la aplicación propuesta. Elaboración propia.

Dichos módulos se describen brevemente a continuación.

- Módulo de comunicación: Este módulo permite hacer uso del Bluetooth disponible en el dispositivo móvil, a fin de establecer la comunicación inicial entre los integrantes del equipo y mantenerla durante toda la sesión.
- Módulo de sincronización: Este módulo tiene la finalidad de mantener actualizados sincrónicamente los dispositivos que están participando en la sesión colaborativa designada por el app, así como de aplicar los tiempos y los modos en que cada participante realiza las tareas relacionadas a su rol.
- Módulo matemático: Este módulo se encarga de generar y validar los aspectos algebraicos y geométricos de la aplicación móvil colaborativa. De su ejecución depende tanto el ejercicio a resolver, como la evaluación de las áreas resultantes y los resultados ingresados por los estudiantes. Sus principales componentes son:
  - Generador de coeficientes: Componente encargado de generar aleatoriamente los coeficientes del ejercicio a resolver por el equipo de trabajo. Por ejemplo, la expresión $(2x+2)(2x+3)$ generará 3 coeficientes: a = 2 que es el coeficiente de *x*, que en su conjunto forman el término común; b = +2 y c = +3, que son los coeficientes de los términos no comunes. Estos coeficientes deben generarse aleatoriamente a fin de asegurar la generación de múltiples ejercicios y reducir al máximo el riesgo de generar ejercicios duplicados para un mismo equipo de trabajo.
  - Validador de áreas: En este componente se encuentran los algoritmos destinados al control y validación de áreas adyacentes dentro del área de trabajo. Es decir, que las diferentes áreas seleccionadas se encuentren posicionadas en un área valida, en correspondencia a los valores de entrada del producto de binomios. Se muestra en la figura 5 un ejemplo de un acomodo de áreas en proceso.

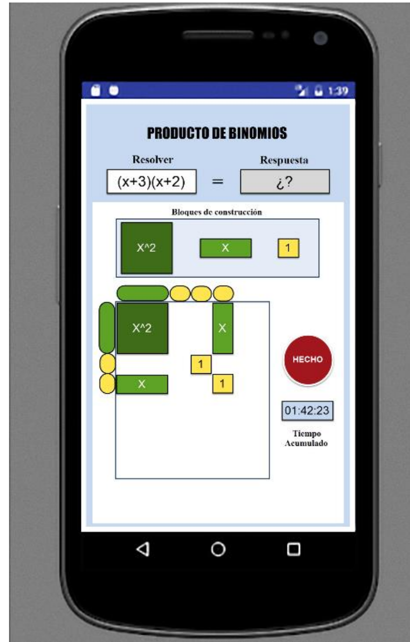


Figura 5: Validador de posición de áreas. Elaboración propia.

2.3. **Fase de Desarrollo:** Esta fase contempla la construcción del software (app) en la plataforma Android, cuya sintaxis está basada en el lenguaje de programación Java. Se plantea la codificación aplicando una metodología de desarrollo ágil como Scrum, que permite una rápida respuesta a cambios de requisitos gracias a su proceso iterativo, y la disminución de documentación generada.

Como herramienta de desarrollo se eligió Android Studio, que es el entorno de desarrollo integrado oficial para la plataforma Android. Este fue anunciado el 16 de mayo de 2013 en la conferencia Google I/O y su primera versión estable fue publicada en diciembre de 2014. La apariencia de la pantalla principal tras terminar la actividad exitosamente se aprecia en la figura 6.

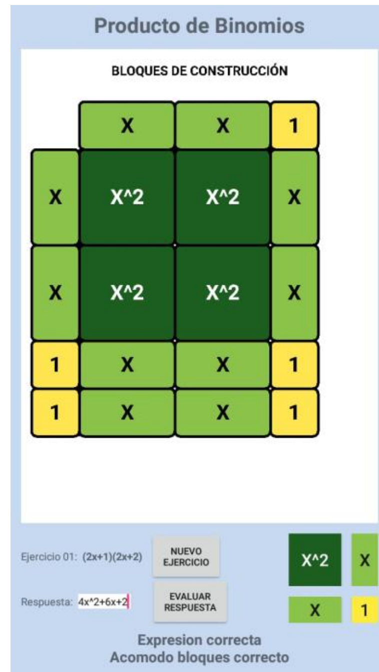


Figura 6: Diseño de la interfaz gráfica de la aplicación. Elaboración propia.

Al iniciar la interacción con el prototipo de la aplicación, el alumno tiene acceso a una primera pantalla de configuración, donde puede elegir algunos valores de parámetros tales como: valor máximo de los coeficientes, la relación de aspecto de los bloques *x* respecto a las unidades y el nivel de dificultad del ejercicio, tal como describe la figura 7, lo cual en combinación cambia significativamente la complejidad y el tiempo en que se completa el ejercicio.

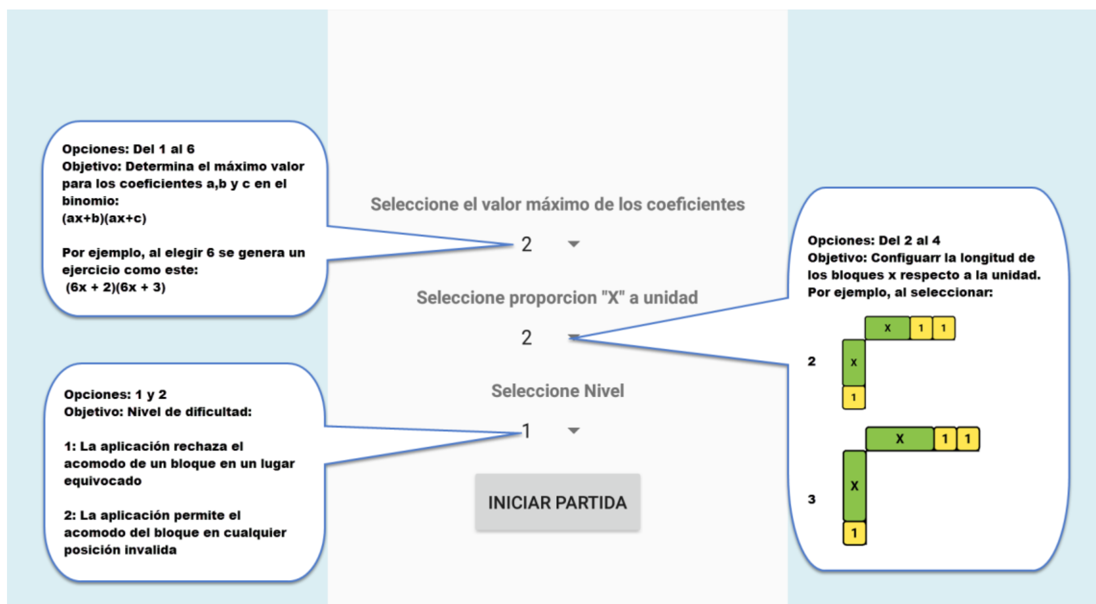


Figura 7: Opciones de configuración del ejercicio. Elaboración propia.

Al dar clic en iniciar partida la app muestra el tablero del ejercicio a resolver, donde el rol de elector de pieza debe seleccionar el bloque que desea usar para completar el total del área. Luego el colocador desplazara el bloque hasta la posición que considera correcta.

Se muestra a continuación un ejemplo de la interacción seleccionando el nivel 1, en que la app rechaza el bloque que se intenta colocar en una posición equivocada, por lo que el estudiante puede cometer errores varias veces hasta comprender cuál es la posición esperada, figura 8.

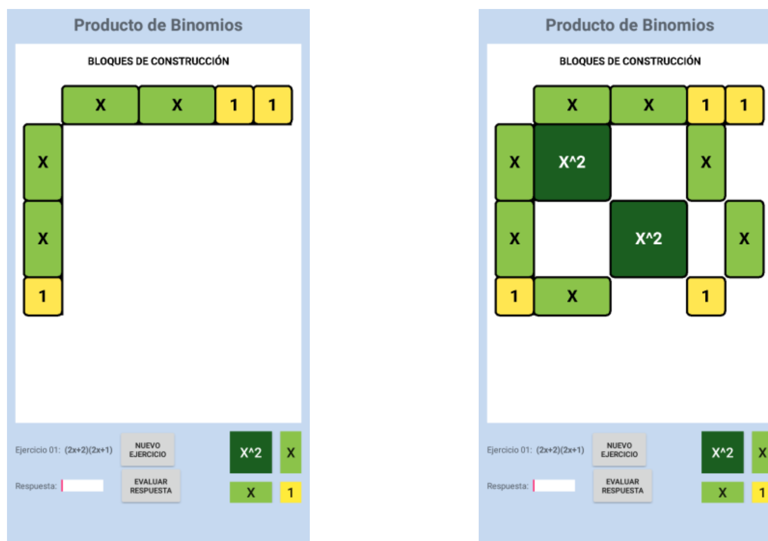


Figura 8: Inicio de ejercicio y su desarrollo en nivel 1.

Ahora se muestra un ejemplo de la interacción seleccionando el nivel 2, en que la app permite que el bloque se coloque en una posición equivocada, figura 9.

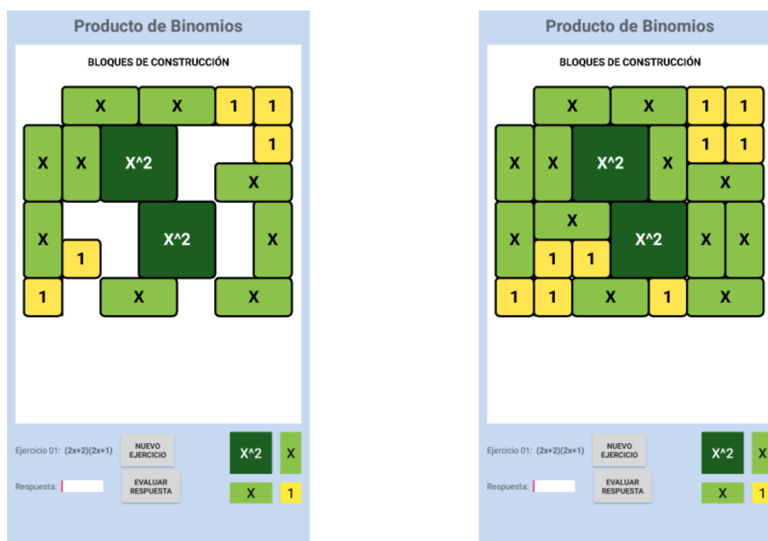


Figura 9: Desarrollo de ejercicio y finalización en nivel 2.

Una vez que han sido colocados todos los bloques, el escritor escribe su respuesta y la app le indica si el resultado ingresado es correcto. Cabe destacar que el nivel avanzado se recibe la confirmación por separado respecto a la respuesta y a la forma en que los bloques fueron colocados, como se aprecia en la figura 10.

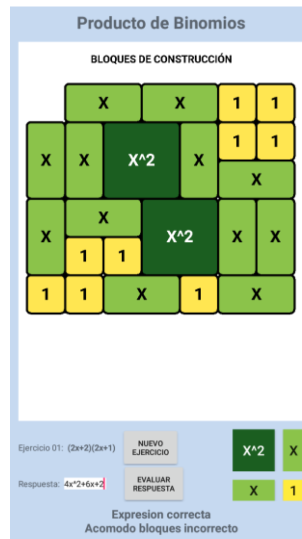


Figura 10: Evaluación de un ejercicio nivel 2.

3. Conclusiones

Es importante generar los instrumentos tecnológicos, como lo es la aplicación móvil propuesta, que acerquen a los jóvenes a los conceptos matemáticos básicos como el de los binomios con término común. La propuesta actual se encuentra en fase de diseño y en prueba piloto de usabilidad.

La aplicación denominada Producto de binomios busca generar una experiencia interactiva de aprendizaje diferente al método tradicional, e incluso a ciertos recursos web que generalmente se centran en la descripción del algoritmo para determinar los coeficientes del trinomio resultante de la multiplicación de los binomios. Para enriquecer la enseñanza de los binomios con término común con un método didáctico diferente al tradicional, incluye en su diseño los marcos del modelo CUVIMA para identificar los principios definidos de la matemática realista (bloques figurados y modos de ejecución colaborativa), el modelo del dispositivo móvil (identificando funciones e interacciones válidas) y el modelo de análisis conceptual de la matemática (manipulación algebraica de términos y su significado).

Además, el desarrollo de la aplicación contempla desde su diseño el enfoque del aprendizaje colaborativo, para fomentar la comunicación y la retroalimentación entre pares, las cuales ayudan a un acercamiento al conocimiento matemático de cada estudiante, y la posibilidad de intercambiar opiniones e incluso generar acuerdos en equipos de trabajo.

El factor tecnológico propuesto en este diseño es fundamental para propiciar una interacción ordenada de los estudiantes, ya que con la integración de un módulo de comunicación es posible pasar de un esquema de uso individual, a una aplicación que automáticamente gestiona turnos y roles, y que controla las acciones que cada estudiante puede o no realizar al mismo tiempo,

aprovechando las capacidades de los dispositivos móviles que son muy populares y están al alcance de un gran número de estudiantes de secundaria. Además, el módulo de comunicación contempla la generación automática de ejercicios diferentes mediante el módulo matemático.

A través del diseño de esta app, en conjunto con la actividad educativa adecuada y con el apoyo del profesor como guía de la actividad, se pretende explotar los principios de la teoría de la matemática realista. Por ejemplo, hacer uso del principio de realidad a través de la manipulación de bloques dentro del contexto de los ejercicios propuestos por la aplicación móvil, en sustitución de bloques físicos con los que es difícil contar en un aula de clases. También el uso del principio de niveles, permitiendo al estudiante iniciar con ejercicios sencillos y con validaciones que lo guían y le impiden hacer acomodos incorrectos, para posteriormente presentarle ejercicios que requieren mayor número de movimientos y donde es necesaria una mayor reflexión espacial de lo que representa la multiplicación de binomios. Además el principio de interacción, a partir de la formación de equipos de trabajo de tres integrantes cada uno, quienes haciendo uso de su propio dispositivo desempeñan un rol en una sesión síncrona de trabajo. De esta manera, los integrantes suman esfuerzos individuales y tiene la posibilidad de intercambiar ideas respecto a la mejor manera de resolver el ejercicio, a fin de concretar la actividad más fácilmente.

La implementación del módulo de comunicación está en proceso, por lo que aún no se reportan en este trabajo las pantallas correspondientes a la gestión de la conectividad bluetooth. Una vez concluido el módulo de comunicación, la siguiente fase de la metodología contempla las pruebas que se dividen en dos sentidos, la primera es la prueba de funcionalidad de la aplicación y la segunda es la prueba de uso en los estudiantes en un aula de clase tradicional.

Respecto al trabajo futuro y las posibles mejoras, el presente trabajo actualmente se centra en la multiplicación de binomios con término común, pero es posible extender su alcance a otros tipos de productos notables e incluso a otros conceptos matemáticos relacionados con el modelo de área.

4. Referencias

Backhoff, E., Andrade, E., Peón, M., Sánchez, A. y Bouzas, A. (2006). El aprendizaje del Español, las Matemáticas y la Expresión Escrita en la educación básica en México: sexto de primaria y tercero de secundaria. Ciudad de México: Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación.

Baya'a, N. y Daher, W. (2009). Learning Mathematics in an Authentic Mobile Environment: the Perceptions of Students. *iJIM*, *3*(S1), 6-14. Disponible en línea http://dx.doi.org/10.3991/ijim.v3s1.813. [Recuperado el 24 de Agosto del 2018].

Castillo, S. (2008). Propuesta pedagógica basada en el constructivismo para el uso óptimo de las TIC en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *11*(2), 171-194.

Coll, C., Martín, E., Mauri, T., Miras, M., Onrubia, J., Solé, I., y Zabala, A. (1997). *El constructivismo en el aula*. Barcelona, España: Graó.

Covas, M., y Bressan, A. (2011). La enseñanza del álgebra y los modelos de área.

Cruz, R. (2010). Framework para actividades educativas colaborativas basadas en dispositivos móviles. Tesis doctoral. Universidad Autónoma de Baja California.

Cuevas, C., y Pluvinage, F. (2003). Les projets d'action practique, elements d'une ingeniere d'ensigment des mathematiques. *Annales de didactique et sciences cognitive, 8*, 273-292.

Cuevas C., Villamizar, F., y Martínez, A. (2017). Aplicaciones de la tecnología digital para actividades didácticas que promuevan una mejor comprensión del tono como cualidad del sonido para cursos tradicionales de física en el nivel básico. *Enseñanza de las ciencias*, 35(3), 129-150.

Diah, N., Ehsan, K. e Ismail, M. (2010). Discover mathematics on mobile devices using gaming approach. *Procedia-Social and Behavioral Sciences, 8*, 670-677. Disponible en línea http://dx.doi.org/10.1016/j.sbspro.2010.12.093. [Recuperado el 25 de Agosto del 2018].

Drigas, A., y Pappas, M. (2015). A review of mobile learning applications for mathematics. *International Journal of Interactive Mobile Technologies (iJIM)*, *9*(3), 18-23.

Filloy, E., Puig, L. y Rojano, T. (2008). *Educational algebra. A theoretical and empirical approach*. New York: Springer.

Freudenthal, H. (1991). Revisiting mathematics education: China lectures.

Godino, J., Aké, L., Gonzato, M., y Wilhelmi, M. (2012). Niveles de razonamiento algebraico elemental.

INEE (2017). Planea Resultados nacionales 2017. *Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación*. Disponible en línea http://publicaciones.inee.edu.mx/buscadorPub/P2/A/336/P2A336.pdf. [recuperado el 18 de junio del 2018].

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. I: Lester, F. K. Jr. *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. USA: Information Age Publishing Inc.

Lacasta, E., Madoz, E y Wilhelmi, M. (2006). El paso de la aritmética al álgebra en la Educación Secundaria Obligatoria. *Indivisa*, Extra 4, 79–90.

Martos, E. (2013).Valores prácticos y epistémicos de los productos notables en profesores de matemáticas. Tesis doctoral. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN.

OCDE (2016). Programa para la evaluación internacional de los alumnos (PISA) PISA 2015-Resultados. *Organización para la Cooperación y Desarrollo Económico*. Disponible en línea https://www.oecd.org/pisa/PISA-2015-Mexico-ESP.pdf. [Recuperado el 14 de junio del 2018].

Roberts, N., y Vänskä, R. (2011). Challenging assumptions: Mobile learning for mathematics project in South Africa. *Distance Education*, *32*(2), 243-259.

Sánchez, J. (2004). Bases constructivistas para la integración de TICs. *Revista enfoques educacionales*, *6*(1), 75-89.

UNAM (2013). *Las TIC para aprender*. Disponible en línea http://tutorial.cch.unam.mx/bloque4/lasTIC. [Recuperado el 18 de Junio del 2018].

Villarreal, M. (2012). Tecnologías y educación matemática: necesidad de nuevos abordajes para la enseñanza. *VEsC*, 3(5): 73-94.

Zaldivar J., Londoño N. y Medina G. (2017). Modelación y Tecnología en la Enseñanza de las Matemáticas a nivel Bachillerato: un ejemplo de Situación de Aprendizaje. *El Cálculo y su Enseñanza, Enseñanza de las Ciencias y la Matemática. 8*, 18-30